

**Teoria de Pontos Fixos**  
**Mini Curso, XIV EBT**  
**Campinas, SP Brasil**  
**26 a 30 de julho de 2004**

Peter Wong

BATES COLLEGE, U.S.A.



## Sumário

Prefácio	v
Primeira Parte	1
1. Alguns Teoremas Clássicos	1
2. Teorema do Ponto Fixo de Brouwer	3
3. Índice de Pontos Fixos	6
4. A idéia de Lefschetz	11
Segunda Parte	13
5. O Teorema do Traço de Hopf	13
6. O teorema do ponto fixo de Lefschetz-Hopf	16
7. O Teorema de Borsuk-Ulam	17
8. Um Exemplo Simples	21
Terceira Parte	25
9. Teoria de Pontos Fixos de Nielsen	25
10. Abordagem por Espaços de Recobrimento	27
11. Classes de Reidemeister	29
12. Cálculo do número de Nielsen	31
Quarta Parte	37
13. O traço de Reidemeister	37
14. Um Exemplo	39
15. Aplicações à Dinâmica	42
16. Conclusão	45
Apêndice	49
17. Revisão	49

Referências Bibliográficas

51

## Prefácio

Essas notas pretendem ser uma breve introdução à teoria topológica de pontos fixos para ser apresentada como um mini curso no 14º Encontro Brasileiro de Topologia, realizado de 26 a 30 de junho de 2004, na UNICAMP em Campinas. O principal objetivo é apresentar as idéias iniciais/originais da teoria que se iniciou com o trabalho de Solomon Lefschetz nos anos 1920. Caminharemos em direção a recíproca do teorema do ponto fixo de Lefschetz utilizando a noção de classes de pontos fixos, introduzida por Jakob Nielsen. Através do trabalho de K. Reidemeister, W. Franz, e F. Wecken na década de 1930 e início dos anos 1940, apresentaremos os fundamentos para a teoria de pontos fixos de Nielsen. Discutiremos então a calculabilidade do número de Nielsen e, em particular, do traço de Reidemeister. Algumas aplicações à dinâmica de baixa dimensão também serão discutidas.

Algumas demonstrações serão omitidas ou somente esquematizadas. As referências básicas são [1], [5], [8], [10] e [12]. O artigo “survey” [2] apresenta uma ótima narrativa histórica dos primeiros desenvolvimentos da teoria.

Agradeço ao comitê científico e à organização pelo gentil convite e pela oportunidade de ministrar esse curso e ao Prof. Daniel Vendruscolo por traduzir o manuscrito original para o português.



# Primeira Parte

## 1. Alguns Teoremas Clássicos

Sejam  $K$  e  $K'$  dois complexos simpliciais finitos tais que  $|K| = |K'|$ , i.e., que tenham o mesmo espaço topológico de base.

Definimos

$$\chi := \sum_q (-1)^q \# \{ q - \text{simplexos em } K \};$$
$$\chi' := \sum_q (-1)^q \# \{ q - \text{simplexos em } K' \}$$

De fato esses dois números são o mesmo e temos:

TEOREMA 1.1.

$$\chi = \chi'.$$

O número  $\chi = \chi(|K|)$  é chamado *característica de Euler* de  $|K|$ .

Tal resultado é um teorema global, a soma de um conjunto de invariantes locais resulta em um invariante global. O nome característica de Euler é devido a Leonard Euler, que foi quem primeiro notou a invariância da soma alternada do número de simplexos para grafos planares.

De maneira mais geral, se  $M$  é um poliedro compacto, definimos:

$$\begin{aligned} \chi(M) &:= \sum_q (-1)^q \text{posto}_{\mathbb{Z}} H_q(M; \mathbb{Z}) \\ &= \sum_q (-1)^q b_q \end{aligned}$$

onde  $b_q$  é o  $q$ -ésimo número de Betti de  $M$ .

Um dos mais belos resultados em geometria é o famoso Teorema de Gauss-Bonnet. Em dimensão 2, ele pode ser enunciado como:

TEOREMA 1.2. *Se  $M \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície compacta. Então:*

$$2\pi \cdot \chi(M) = \int_M \kappa(p)$$

onde  $\kappa(p)$  denota a curvatura Gaussiana em  $p \in M$ .

Claramente a curvatura não é um invariante topológico, mas o teorema nos diz que a totalidade desses invariantes locais é, de fato, um invariante topológico.

Na análise complexa encontramos integrais de linha e, conseqüentemente, o índice de uma curva.

Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$  uma curva fechada suave. Definimos o índice de  $\gamma$  como

$$I_\gamma := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

TEOREMA 1.3. *Para toda curva fechada suave  $c$  homotópica a  $\gamma$ , temos*

$$I_\gamma = I_c \quad (\in \mathbb{Z}).$$

Suponha que  $M$  é uma variedade orientável suave e compacta e que  $v$  é um campo vetorial suave em  $M$  com zeros isolados (portanto em número finito). Por um momento assuma que estamos em algum espaço Euclidiano e que  $0$  é um zero isolado de  $v$ . Então, tomando um pequeno disco de raio  $\epsilon$  ao redor de  $0$ , vemos que o bordo  $S_\epsilon$  desse disco é homeomorfo à esfera e para todo  $x \in S_\epsilon$ , a aplicação  $x \mapsto v(x)/\|v(x)\|$  produz um inteiro, dado pelo seu grau. No caso geral, usando uma parametrização local, obtemos um índice inteiro  $i_x$  associado a cada zero  $x$ . O teorema de Poincaré-Hopf diz que:

TEOREMA 1.4.

$$\chi(M) = \sum_x i_x$$

onde  $x$  percorre o conjunto dos zeros de  $v$ .

Nosso primeiro objetivo é apresentar o seguinte teorema de Lefschetz-Hopf.

**TEOREMA 1.5.** *Se  $X$  é um poliedro conexo e compacto e  $f : X \rightarrow X$  é uma auto-aplicação tal que  $f$  tem somente pontos fixos isolados, cada um deles no interior de simplexes maximais. Então*

$$L(f) = \sum_{x_i} I(f, x_i)$$

onde  $L(f)$  denota o número de Lefschetz e  $I(f, x_i)$  é o índice de pontos fixos de  $f$  no ponto fixo isolado  $x_i$ .

Veremos que  $I(f, x_i)$  é definido em uma pequena vizinhança  $U_i$  de  $x_i$ . De fato, se  $I(f, x_i) \neq 0$  então qualquer aplicação homotópica (por uma homotopia compactamente fixada) a  $f$  (relativamente a  $X - U_i$ ) terá um ponto fixo em  $U_i$ .

Em razão desse teorema,  $L(f) \neq 0$  implica que  $Fix f := \{x \in X \mid f(x) = x\}$  é não vazio.

## 2. Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

O teorema do ponto fixo de Lefschetz-Hopf não é o primeiro teorema de ponto fixo topológico desse tipo.

Nos cursos de cálculo vemos o resultado abaixo, conhecido como teorema do Valor Intermediário, devido a B. Bolzano, que o provou em 1817.

**TEOREMA 2.1.** *Seja  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $f(-1) < 0$  e  $f(1) > 0$ . Então existe um ponto  $c \in [-1, 1]$  tal que  $f(c) = 0$ .*

O Teorema do Valor Intermediário (TVI) é um resultado topológico sobre a reta real. Podemos obter a versão unidimensional do teorema do ponto fixo de Brouwer a partir do TVI.

**TEOREMA 2.2.** *Seja  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  uma função contínua. Então existe  $c \in [-1, 1]$  tal que  $f(c) = c$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** Seja  $h(x) = x - f(x)$ . A aplicação  $h$  é contínua em  $[-1, 1]$ . Se  $f(1) = 1$  ou  $f(-1) = -1$  então nada temos a provar. Suponhamos  $f(1) \neq 1$  e  $f(-1) \neq -1$ , então  $h(-1) < 0$  e  $h(1) > 0$ . Pelo TVI existe  $c \in [-1, 1]$  tal que  $h(c) = 0$ , i.e.,  $f(c) = c$ .  $\square$

O resultado seguinte é o teorema do ponto fixo de Brouwer, em sua versão  $n$ -dimensional, provado por L.E.J. Brouwer (1912).

**TEOREMA 2.3.** *Se  $D^n$  denota o  $n$ -disco fechado em  $\mathbb{R}^n$  e  $f : D^n \rightarrow D^n$  é uma aplicação (contínua). Então existe um ponto  $x_0 \in D^n$  tal que  $f(x_0) = x_0$ .*

Em 1931, K. Borsuk observou que o Teorema 2.3 é equivalente ao seguinte teorema (*da não retração*).

**TEOREMA 2.4.** *Não existe uma aplicação contínua  $r : D^n \rightarrow \partial D^n$  com  $r(x) = x$  para todo  $x \in \partial D^n$  onde  $\partial D^n = S^{n-1}$  é o bordo de  $D^n$ .*

Provaremos, agora que o Teorema 2.3 é equivalente ao Teorema 2.4.

**Teorema 2.3  $\Rightarrow$  Teorema 2.4**

**DEMONSTRAÇÃO.** Supondo que exista  $r : D^n \rightarrow \partial D^n$  tal que  $r|_{\partial D^n} = \text{id}_{\partial D^n}$ . Seja  $i : \partial D^n \hookrightarrow D^n$  a inclusão. Então,

$$(r \circ i)(x) = r(x) = x$$

e a composta  $(r \circ i)$  é a identidade em  $\partial D^n$ .

Como  $\partial D^n = S^{n-1}$  e  $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ ,

$$\text{id} = (r \circ i)_* : H_{n-1}(\partial D^n) \rightarrow H_{n-1}(\partial D^n)$$

é não nula. Além disso, o seguinte diagrama

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccc} H_{n-1}(\partial D^n) & \xrightarrow{(r \circ i)_*} & H_{n-1}(\partial D^n) \\ & \searrow i_* & \nearrow r_* \\ & & H_{n-1}(D^n) \end{array}$$

é comutativo com  $H_{n-1}(D^n) = 0$  e assim  $r_* \circ i_* = (r \circ i)_*$  será o homomorfismo nulo o que contradiz o fato de  $(r \circ i)_* = \text{id}$ . Logo  $r$  não pode existir.  $\square$

**Teorema 2.4**  $\Rightarrow$  **Teorema 2.3**

DEMONSTRAÇÃO. Supondo que exista uma aplicação  $f : D^n \rightarrow D^n$ , sem pontos fixos, i.e., uma aplicação tal que  $f(x) \neq x$  para todo  $x \in D^n$ .

Definimos  $g : D^n \rightarrow \partial D^n$  que leva  $x$  ao ponto de intersecção entre  $\partial D^n$  e a semi-reta com início em  $x$  e que passa por  $f(x)$ . (Veja a figura abaixo.)

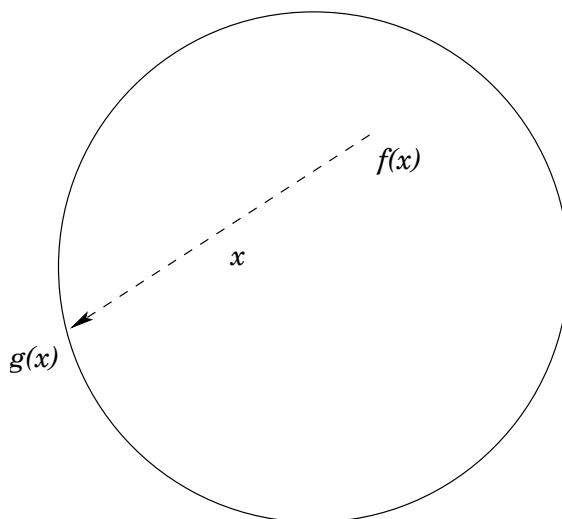


FIGURA 1

A aplicação  $g$  é contínua e  $g(x) = x$  para todo  $x \in \partial D^n$  o que contradiz o Teorema da não retração (2.4) e assim segue o Teorema 2.3.  $\square$

O Teorema do ponto fixo de Lefschetz (Teorema 1.5) generaliza o teorema do ponto fixo de Brouwer pois  $L(f) = 1$  para toda  $f : D^n \rightarrow D^n$  dado que  $H_q(D^n) = 0$ , exceto quando  $q = 0$ .

A seguir discutiremos índice de pontos fixos.

### 3. Índice de Pontos Fixos

Dada uma aplicação  $\varphi : S^n \rightarrow S^n$ , o *grau* de  $\varphi$ , denotado  $\deg \varphi$ , é o único inteiro tal que para todo  $x \in H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ ,

$$\varphi_*(x) = \deg \varphi \cdot x.$$

Onde  $\varphi_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$  é o homomorfismo induzido em homologia com coeficientes inteiros.

Suponha que  $x_0$  é um ponto fixo isolado de  $f$ . Escolhendo um disco fechado  $D_0^n$  centrado em  $x_0$  tal que  $D_0^n \cap \text{Fix} f = \{x_0\}$ . Para todo  $x \in \partial D_0^n$ ,  $f(x) \neq x$  e podemos definir

$$\varphi(x) := \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}.$$

Temos que  $\varphi : S^{n-1} \approx \partial D_0^n \rightarrow S^{n-1}$  é uma aplicação contínua. Então definimos o *índice de ponto fixo*,  $I(f, x_0)$ , de  $f$  em  $x_0$  como o inteiro  $\deg \varphi$ .

Antes de falarmos de uma definição geral de índice de pontos fixos, relembremos alguns fatos. Dado um par  $(X, A)$ , temos a seqüência longa de grupos de homologia

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(X, A) \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

Em particular, se  $X = D^n$  e  $A = \partial X = S^{n-1}$  temos que para  $q \neq 0$ ,  $H_q(D^n) = 0$  e da seqüência longa resulta  $H_q(D^n, \partial D^n) \cong H_{q-1}(\partial D^n)$  se  $q > 1$ . Como  $H_{q-1}(\partial D^n) = 0$  exceto para  $q = n$  segue que

$$H_n(D^n, \partial D^n) \cong H_{n-1}(\partial D^n) \cong \mathbb{Z}.$$

Observe que o par  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$  tem o mesmo tipo homotópico que  $(D^n, \partial D^n)$  e então  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ .

**3.1. Definição de  $I(f, U)$  em  $\mathbb{R}^n$ .** Como estamos trabalhando com poliedros compactos os quais podem ser mergulhados em  $\mathbb{R}^n$  para algum  $n$ , assumiremos que  $f$  está definida em um subconjunto aberto de um espaço Euclidiano.

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação. Assumindo que  $Fixf$  é compacto em  $U$ . Então o índice de ponto fixo de  $f$  é o inteiro  $I(f, U) \in \mathbb{Z}$  tal que

$$(i - f)_*(o_F) = I(f, U) \cdot o_0$$

onde  $i : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(i - f)_* : H_n(U, U - Fixf) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ ,  $o_F \in H_n(U, U - Fixf)$  é a classe fundamental de homologia ao redor de  $F = Fixf$  e  $o_0 \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$  é a classe fundamental ao redor da origem  $\{0\}$ . Note que se  $F = Fixf = \{x_0\}$  consiste de um único ponto então  $I(f, U) = \deg(i - f)$ , nesse caso denotamos  $I(f, x_0) := I(f, U)$ . Nos casos que estudaremos  $Fixf$  será um conjunto finito de pontos fixos (isolados).

**3.2. Propriedades Básicas de  $I(f, U)$ .** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ou  $f : U \subset X \rightarrow X$  uma aplicação, onde  $X$  é um poliedro (assuma que  $Fixf$  é compacto em  $U$ ).

(1) Se  $I(f, U) \neq 0$  então  $f$  tem um ponto fixo em  $U$ .

(2) (Invariancia homotópica) Se  $H : U \times [0, 1] \rightarrow X$  é uma homotopia tal que  $\bigcup_t FixH_t \subset U$  é compacto então

$$I(H_0, U) = I(H_1, U).$$

OBSERVAÇÃO 3.1. A condição de compacidade de  $\bigcup_t FixH_t$  em  $U$  não pode ser removida. Por exemplo, seja  $U$  um disco unitário em  $X = \mathbb{R}^2$  e  $f : U \rightarrow X$  a aplicação constante na origem  $(0, 0)$ . Definindo  $H_t(x) = (t, 0)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Observamos que  $I(f, U) = 1$  mas  $FixH_1 = \emptyset$  então  $I(H_1, U) = 0$ . Aqui  $\bigcup_t FixH_t$  não é compacto em  $U$ . (Veja figura abaixo.)

(3) (Aditiva) Suponha que  $U_1, \dots, U_r$  são subconjuntos abertos mutuamente disjuntos de  $U$  e que  $Fixf \subset \bigcup U_j$ . Se  $f_j = f|_{U_j}$ . Então,

$$I(f, U) = \sum_j I(f_j, U_j).$$

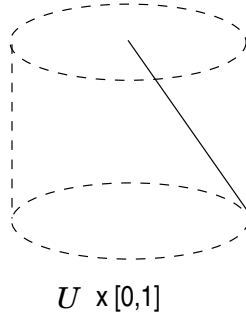


FIGURA 2

(4) (Multiplicativa) Dadas  $f : U \rightarrow X$  e  $g : V \rightarrow Y$ , considere a aplicação produto

$$f \times g : U \times V (\subset X \times Y) \rightarrow X \times Y.$$

Então,

$$I(f \times g, U \times V) = I(f, U) \cdot I(g, V).$$

(5) (Comutativa) Sejam  $U$  e  $V$  subconjuntos abertos de  $X$  e de  $Y$  respectivamente. Dadas duas aplicações  $f : U \rightarrow Y$  e  $g : V \rightarrow X$ . Considere as aplicações

$$g \circ f : f^{-1}(V) \rightarrow X, \quad f \circ g : g^{-1}(U) \rightarrow Y.$$

Então  $Fix(g \circ f)$  é homeomorfo a  $Fix(f \circ g)$  e

$$I(g \circ f, f^{-1}(V)) = I(f \circ g, g^{-1}(U)).$$

Dizemos que uma aplicação  $f : U$  (subconjunto aberto de  $X$ )  $\rightarrow X$  é *compactamente fixada* se  $Fix f$  é compacto em  $U$ . Uma homotopia  $\{H_t\} : U \rightarrow X$  é *compactamente fixada* se  $(\bigcup_t Fix H_t)$  é compacto em  $U$ .

(6) (Remoção local) Suponha que  $f$  tenha um ponto fixo isolado  $x_0$  tal que  $I(f, U_0) = 0$  para alguma vizinhança aberta  $U_0$  de  $x_0$  tal que  $Fix f \cap U_0 = \{x_0\}$ . Para cada vizinhança aberta  $V$  de  $x_0$  com  $V \subset U_0$ , existe uma aplicação  $g : U \rightarrow X$  compactamente fixada, homotópica a  $f$  tal que  $g \equiv f$  em  $U - V$  e  $Fix g = Fix f - \{x_0\}$ .

Note que pela propriedade aditiva do índice de ponto fixo, se  $W$  é um conjunto aberto tal que  $Fix f \subset W \subset cl(W) \subset U$  então  $I(f, U) = I(f|_W, W)$ .

DEFINIÇÃO 3.1. Seja  $f : X \rightarrow X$  uma auto-aplicação de um poliedro conexo e compacto  $X$ . Para cada  $q \geq 0$ , o grupo de homologia com coeficientes racionais  $H_q(X; \mathbb{Q})$  é um espaço vetorial de dimensão finita sobre  $\mathbb{Q}$  e o homomorfismo induzido  $f_{*q} : H_q(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_q(X; \mathbb{Q})$  é uma transformação linear cujo traço  $\text{tr} f_{*q}$  está bem definido. O número de Lefschetz  $L(f)$  de  $f$  é definido como sendo o número

$$L(f) := \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \text{tr} f_{*q}.$$

Note que *não* segue da definição que  $L(f)$  é um inteiro, mas uma consequência do teorema de Lefschetz-Hopf implicará que  $L(f) \in \mathbb{Z}$ .

A próxima propriedade é o próprio Teorema de Lefschetz-Hopf.

(7) (Normalização)

$$L(f) = I(f, X).$$

Em particular, se  $f$  tem  $x_1, \dots, x_k$  como pontos fixos (isolados), então

$$L(f) = \sum_j I(f, x_j).$$

OBSERVAÇÃO 3.2. As propriedades (1) - (5) e (7) caracterizam o número de Lefschetz. Ou seja, qualquer função, com valores nos inteiros, que satisfaça tais propriedades coincide com o índice de pontos fixos.

Existe uma prova recente do teorema de Lefschetz-Hopf feita por M. Arkowitz e R.F. Brown, “The Lefschetz-Hopf theorem and axioms for the Lefschetz number,” *Fixed Point Theory and Applications*, **1** (2004), 1 - 11.

Seja  $X$  um espaço topológico com o tipo homotópico de um  $CW$ -complexo finito e conexo. Se  $\lambda$  é uma função com valores nos reais tal que

(1) (Homotopia) Se  $f, g : X \rightarrow X$  são aplicações e  $f$  é homotópica a  $g$ , então  $\lambda(f) = \lambda(g)$ .

(2) (Cofibração) Se  $A \subset X$  é um subpoliedro e dado o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/A \\ f' \downarrow & & f \downarrow & & \bar{f} \downarrow \\ A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/A \end{array}$$

então

$$\lambda(f) = \lambda(f') + \lambda(\bar{f}).$$

(3) (Comutatividade) If  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$  são aplicações então

$$\lambda(f \circ g) = \lambda(g \circ f).$$

(4) (“Buquet” de círculos) Se

$$f : \bigvee_{j=1}^k S_j^1 \rightarrow \bigvee_{j=1}^k S_j^1$$

é uma aplicação,  $k \geq 1$  então

$$\lambda(f) = -(\deg f_1 + \dots + \deg f_k)$$

onde  $f_i = p \circ f \circ e_i, e_i : S_i^1 \hookrightarrow \bigvee_j^k S_j^1$  e  $p_i : \bigvee_j^k S_j^1 \rightarrow S_i^1$  é a projeção canônica.

O resultado seguinte é devido a Arkowitz e Brown.

**TEOREMA 3.1.** *Se  $\lambda$  satisfaz os axiomas (1) - (4) então  $\lambda = \tilde{L}$  onde  $\tilde{L}(f) := L(f) - 1$  é o número de Lefschetz reduzido.*

Agora, provando que  $\tilde{I} := I - 1$  satisfaz os axiomas (1) - (4), segue a propriedade da normalização. Aqui  $\tilde{I}(f, X) := I(f, X) - 1$  é o índice de ponto fixo reduzido.

#### 4. A idéia de Lefschetz

Como podemos provar o teorema do ponto fixo de Lefschetz-Hopf? S. Lefschetz inicialmente anunciou (1923) seu teorema do ponto fixo para auto-aplicações de variedades compactas. Como ele teve a idéia de *seu número*?

Seja  $M$  uma variedade diferenciável, conexa, compacta e orientável. Denotaremos por  $\Delta_M$  a diagonal de  $M$  em  $M \times M$ , i.e.,  $\Delta_M := \{(x, x) | x \in M\} \subset M \times M$ . Dada uma auto-aplicação  $f : M \rightarrow M$ , consideramos a aplicação  $1 \times f : M \rightarrow M \times M$  dada por  $(1 \times f)(x) = (x, f(x))$ .

A imagem de  $1 \times f$  é, simplesmente, o gráfico da  $f$ .

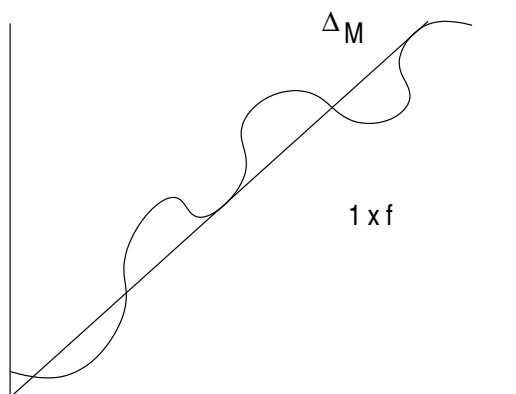


FIGURA 3

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $f$  é diferenciável e que o gráfico de  $f$  e  $\Delta_M$  são transversais. Note que em uma intersecção  $(x, x)$ , o ponto  $x$  é um ponto fixo de  $f$ . Ou seja, os pontos fixos de  $f$  são as intersecções do gráfico da  $f$  com a diagonal  $\Delta_M$ .

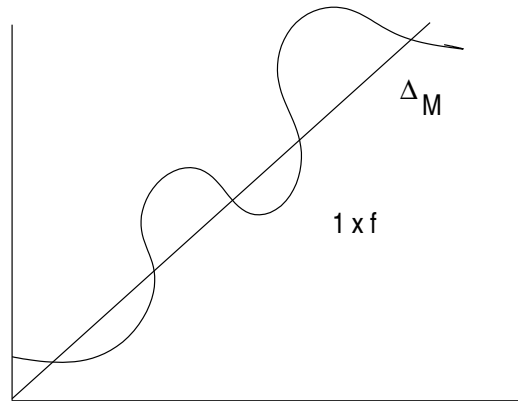


FIGURA 4

A cada intersecção (transversal)  $(x, x)$  podemos atribuir um número de intersecção  $L_x(f) \in \{\pm 1\}$  (também chamado de número de Lefschetz local da  $f$  em  $x$ ). Temos assim que o número de Lefschetz é, simplesmente, a soma dos números de Lefschetz locais, i.e.,

$$L(f) = \sum_{x \in \text{Fix} f} L_x(f).$$

Como podemos ver, a definição do número de Lefschetz resgata essa interpretação geométrica de pontos fixos, vistos como intersecções.

## Segunda Parte

### 5. O Teorema do Traço de Hopf

Seja  $X$  um poliedro compacto. Como  $X$  é compacto, existe somente um número finito de simplexes. Suponha que  $x_0$  é um ponto fixo isolado de uma auto-aplicação  $f$  que pertence ao interior de um simplexo maximal  $\sigma$ . Usando aproximação simplicial, podemos supor que  $f$  é simplicial, ou seja que  $f$  leva um simplexo em um simplexo. Como  $f(x_0) = x_0$  e  $\sigma$  é maximal, temos que  $f(\sigma) \subset \sigma$ . Por outro lado, se  $\sigma'$  é um simplex tal que  $f(\sigma') \subset \sigma'$ , então pelo teorema do ponto fixo de Brouwer 2.3,  $f$  tem um ponto fixo em  $\sigma'$ .

Denotando por  $C_p(X; \mathbb{Q})$  o espaço vetorial sobre  $\mathbb{Q}$ , de dimensão finita gerado pelos  $p$ -simplexos orientados de  $X$ . A aplicação  $f$  induz

$$f_{\#p} : C_p(X; \mathbb{Q}) \rightarrow C_p(X; \mathbb{Q})$$

a qual é uma aplicação de cadeia do complexo de cadeia  $\{C_p(X; \mathbb{Q}), \partial\}$ , onde  $\partial$  é o operador bordo usual.

Se  $\sigma_1^p, \dots, \sigma_{k(p)}^p$  são os  $p$ -simplexos orientados, eles geram  $C_p(X; \mathbb{Q})$  e portanto a aplicação induzida  $f_{\#p}$  é dada pela matriz  $(a_{ij})$  com

$$f_{\#p}(\sigma_j^p) = \sum_{i=1}^{k(p)} a_{ij} \sigma_i^p.$$

Em particular, se  $a_{ii} \neq 0$  para algum  $i$  então  $f$  tem um ponto fixo em  $\sigma_i^p$ .

Definimos

$$(5.1) \quad \mathcal{T}r(f_{\#}) := \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \text{tr}(f_{\#q}).$$

Lembramos da Definição 3.1 que o número de Lefschetz é definido de maneira parecida, em homologia, especificamente,

$$L(f) = \mathcal{T}r(f_*) = \sum_{q=0} (-1)^q \text{tr}(f_{*q}).$$

Para enunciar e provar o teorema do traço de Hopf, precisaremos do seguinte resultado, que pode ser demonstrado usando-se álgebra linear.

LEMA 5.1. *Sejam  $A, B$  e  $C$  espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo  $k$  tais que*

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

*é exata. Dado um diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \varphi_A \downarrow & & \varphi_B \downarrow & & \varphi_C \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

*temos que*

$$\text{tr}\varphi_B = \text{tr}\varphi_A + \text{tr}\varphi_C.$$

Agora o teorema do traço de Hopf.

TEOREMA 5.1.

$$\mathcal{T}r(f_{\#}) = \mathcal{T}r(f_*) = L(f).$$

DEMONSTRAÇÃO. Sejam  $Z_i$  e  $B_i$  os  $i$ -ésimos ciclos e os  $i$ -ésimos bordos em  $C_i = C_i(X; \mathbb{Q})$ . Usando a aplicação bordo  $\partial_i$  temos que

$$0 \longrightarrow Z_i \hookrightarrow C_i \xrightarrow{\partial_i} B_{i-1} \longrightarrow 0$$

é exata.

Como  $f_{\#}$  é uma aplicação de cadeia, temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_i & \longrightarrow & C_i & \longrightarrow & B_{i-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & f_{\#i}|_{Z_i} \downarrow & & f_{\#i} \downarrow & & f_{\#i-1}|_{B_{i-1}} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_i & \longrightarrow & C_i & \longrightarrow & B_{i-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

E o Lema 5.1 implica que

$$\mathrm{tr}(f_{\#i}) = \mathrm{tr}(f_{\#i}|_{Z_i}) + \mathrm{tr}(f_{\#i-1}|_{B_{i-1}}).$$

Pela definição de homologia  $H_i = Z_i/B_i$  e portanto o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B_i & \longrightarrow & Z_i & \longrightarrow & H_i & \longrightarrow & 0 \\ & & f_{\#i}|_{B_i} \downarrow & & f_{\#i} \downarrow & & f_{*i} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B_i & \longrightarrow & Z_i & \longrightarrow & H_i & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Pelo Lema 5.1, temos

$$\mathrm{tr}(f_{*i}) = \mathrm{tr}(f_{\#i}|_{Z_i}) - \mathrm{tr}(f_{\#i}|_{B_i}).$$

Suponha que  $\dim X = n$ . Então, por um lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}r(f_{\#}) &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \mathrm{tr}(f_{\#q}) \\ &= \sum_{q=0}^n [(-1)^q \mathrm{tr}(f_{\#q}|_{Z_q}) + (-1)^q \mathrm{tr}(f_{\#q-1}|_{B_{q-1}})]. \end{aligned}$$

E pelo outro, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}r(f_{*}) &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \mathrm{tr}(f_{*q}) \\ &= \sum_{q=0}^n [(-1)^q \mathrm{tr}(f_{\#q}|_{Z_q}) + (-1)^{q+1} \mathrm{tr}(f_{\#q}|_{B_q})]. \end{aligned}$$

Como  $B_{-1} = 0$ , temos

$$\mathcal{T}r(f_{\#}) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \mathrm{tr}(f_{\#q}|_{Z_q}) + \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^{q+1} \mathrm{tr}(f_{\#q}|_{B_q}).$$

Similarmente,  $B_{n+1} = 0$ , então

$$\begin{aligned} \mathcal{T}r(f_{*}) &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \mathrm{tr}(f_{\#q}|_{Z_q}) + \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^{q+1} \mathrm{tr}(f_{\#q}|_{B_q}) \\ &= \mathcal{T}r(f_{\#}). \end{aligned}$$

□

Como uma consequência imediata do teorema do traço de Hopf, temos

**TEOREMA 5.2.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma auto-aplicação de um poliedro conexo e compacto. Se  $L(f) \neq 0$  então  $f$  tem um ponto fixo.*

## 6. O teorema do ponto fixo de Lefschetz-Hopf

O Teorema do ponto fixo de Lefschetz-Hopf diz mais do que o Teorema 5.2.

**TEOREMA 6.1.** *Seja  $X$  um poliedro compacto e conexo. Suponha que  $f : X \rightarrow X$  é uma aplicação com um número finito de pontos fixos cada um deles contido no interior de um simplexo maximal. Então*

$$L(f) = \sum_{x_i \in \text{Fix}f} I(f, x_i).$$

*Em particular,  $L(f) \in \mathbb{Z}$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** Seja  $x_0 \in |\sigma|$  um ponto fixo isolado no interior de um simplexo maximal  $\sigma$ , Como podemos supor que  $f$  é simplicial, temos  $f(|\sigma|) \subset |\sigma|$ . Let  $p = \dim \sigma$ . A contribuição de  $x_0$  para o traço  $f_{\#p}$  é, simplesmente, o índice de ponto fixo da  $f$  em  $x_0$ .  $\square$

O fato do número de Lefschetz ser sempre um inteiro ainda não é evidente, a menos que  $f$  satisfaça as hipóteses do teorema. O próximo resultado, também conhecido como construção de Hopf (veja [1]), nos garante exatamente isso.

**TEOREMA 6.2.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação em um poliedro conexo e compacto  $X$ . Para todo  $\epsilon > 0$ , existe uma aplicação  $f' : X \rightarrow X$  tal que (1)  $d(f(x), f'(x)) < \epsilon$  para todo  $x \in X$  onde  $d$  é a métrica em  $X$ ; (2)  $f'$  é homotópica a  $f$ ; e (3)  $\#\text{Fix}f' < \infty$  e cada ponto fixo de  $f'$  está contido no interior de um simplexo maximal.*

Por definição o número de Lefschetz é de natureza homológica, assim sendo é um invariante por homotopia. Ou seja, se  $f$  é homotópica a  $f'$  então  $L(f) = L(f')$ .

Vejamos como podemos calcular o número de Lefschetz. Como um exemplo simples tomaremos auto-aplicações da esfera.

**EXEMPLO 6.1.** Seja  $f : S^n \rightarrow S^n$  uma auto-aplicação onde  $S^n$  é a esfera  $n$ -dimensional unitária com  $n \geq 1$ . Se usarmos homologia celular podemos decompor  $S^n = \{e_0\} \cup \{\sigma^n\}$  como a união de duas células, uma de dimensão 0 e outra de dimensão  $n$ . Note que

$$H_i(S^n) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq 0, n; \\ \mathbb{Z}, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Temos então que  $f_{*0} = \text{id}$  e assim  $\text{tr}(f_{*0}) = 1$ . O homomorfismo  $f_{*n} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  é uma  $1 \times 1$  matriz e então  $\text{tr}(f_{*n}) = \text{deg } f$ . Portanto

$$L(f) = 1 + (-1)^n \text{deg } f.$$

## 7. O Teorema de Borsuk-Ulam

Nessa seção usaremos o número de Lefschetz para construir uma prova, curta, do clássico Teorema de Borsuk-Ulam.

**TEOREMA 7.1.** *Se  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma aplicação. Então existe um ponto  $z \in S^2$  tal que  $f(z) = f(-z)$  onde  $-z$  denota o ponto antipodal de  $z$ .*

Se escrevermos  $f(z) = (h_1(z), h_2(z))$  podemos interpretar o teorema 7.1 como segue:

*Em cada momento dado, existe um local  $z$  na Terra ( $S^2$ ) cuja temperatura ( $h_1(z)$ ) e pressão atmosférica ( $h_2(z)$ ) são as mesmas que em seu ponto antipodal  $-z$ .*

Nossa demonstração usará a noção de ação de um grupo em um espaço topológico.

**7.1.  $G$ -espaços e  $G$ -aplicações.** Seja  $G$  um grupo finito. Uma  $G$ -ação em um espaço topológico  $X$  é uma aplicação contínua

$$\Phi : G \times X \rightarrow X$$

tal que (i)  $\Phi(e, x) = x$  para todo  $x \in X$  onde  $e \in G$  denota a unidade; (ii) se escrevermos  $gx := \Phi(g, x)$  então para quaisquer  $g_1, g_2 \in G$  e  $x \in X$ ,

$$g_1(g_2x) = (g_1g_2)(x)$$

ou

$$\Phi(g_1, \Phi(g_2, x)) = \Phi(g_1g_2, x).$$

Nesse caso  $X$  é chamado um  $G$ -espaço.

Uma aplicação  $\varphi : X \rightarrow Y$  entre dois  $G$ -espaços é dita uma  $G$ -aplicação (ou uma aplicação  $G$ -equivariante) se para quaisquer  $g \in G$  e  $x \in X$ ,

$$\varphi(gx) = g\varphi(x).$$

Equivalentemente, se  $\Phi_1 : G \times X \rightarrow X$  e  $\Phi_2 : G \times Y \rightarrow Y$  são as respectivas ações, então

$$\varphi(\Phi_1(g, x)) = \Phi_2(g, \varphi(x)).$$

Voltando ao contexto do teorema de Borsuk-Ulam.

Tomamos  $G = \mathbb{Z}_2$  agindo em  $S^2$  e  $\mathbb{R}^2$  pela ação antipodal. Em outras palavras,  $G$  é constituído de dois elementos - um é a identidade e o outro a aplicação antípoda.

Para cada  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definimos  $\varphi$  fazendo

$$\varphi(z) = f(z) - f(-z).$$

Escrevemos  $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ . Note que

$$\varphi(-z) = f(-z) - f(z) = -\varphi(z)$$

portanto  $\varphi$  é uma  $\mathbb{Z}_2$ -aplicação.

Usando a linguagem de  $G$ -espaços e  $G$ -aplicações, podemos re-escrever o clássico teorema de Borsuk-Ulam. O enunciado abaixo é equivalente ao Teorema 7.1.

**TEOREMA 7.2.** *Para qualquer  $\mathbb{Z}_2$ -aplicação  $\varphi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (com a ação antípodal em  $S^2$  e  $\mathbb{R}^2$ ), existe um ponto  $z \in S^2$  tal que  $\varphi(z) = 0$ . Equivalentemente, não existe  $\mathbb{Z}_2$ -aplicação de  $S^2$  em  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Supondo  $\varphi^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ . Então  $\varphi$  é uma aplicação de  $S^2$  em  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ .

Observe que  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  tem o mesmo  $\mathbb{Z}_2$  tipo homotópico que o círculo unitário  $S^1$ . Na realidade,  $S^1$  é um retrato forte por deformação,  $\mathbb{Z}_2$ -invariante de  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Para ver isso tomamos uma  $\mathbb{Z}_2$ -retração de  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  em  $S^1$ , que leva o ponto  $z$  em um ponto de  $S^1$  radialmente. Especificamente, se  $z$  está no interior do círculo unitário  $z$  é levado em  $S^1$  percorrendo a semi-reta com início na origem e que passa por  $z$ . Se  $z$  está no exterior do círculo unitário,  $z$  é levado em  $S^1$  retraindo-se sobre a semi-reta com início em  $z$  e que passa pela origem. (Veja a figura abaixo.)

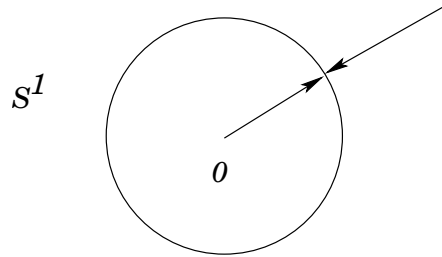


FIGURA 5

Como  $S^1$  com a ação antipodal é um  $G$ -subespaço de  $S^2$ , consideramos a aplicação composta

$$\psi : S^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2 - \{0\} \sim_{\mathbb{Z}_2} S^1 \hookrightarrow S^2.$$

Tomada como uma auto-aplicação de  $S^2$ , o número de Lefschetz de  $\psi$  é dado por

$$L(\psi) = 1 + \deg \psi.$$

Além disso,  $\psi$  se fatora através de  $S^1$  e  $H_2(S^1) = 0$ , o que garante que  $\deg \psi = 0$  e portanto  $L(\psi) = 1$ .

Um exame mais cuidadoso da construção de Hopf (Teorema 6.2) permite construir um análogo equivariante, i.e., toda  $G$ -aplicação pode ser deformada equivariantemente a uma  $G$ -aplicação com um número

finito de pontos fixos. Note que se  $z_0$  é um ponto fixo de  $\psi$  então  $\psi(-z_0) = -\psi(z_0) = -z_0$  e então  $-z_0$  também é um ponto fixo de  $\psi$ . Agora, pegamos uma vizinhança euclidiana  $U_0$  de  $z_0$  que não contenha outros pontos fixos. (Veja figura abaixo.)

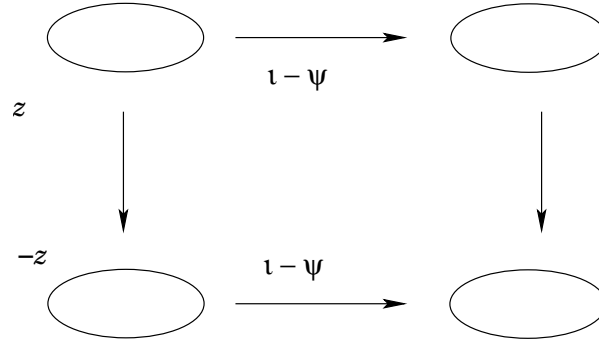


FIGURA 6

Como  $\psi$  é uma  $\mathbb{Z}_2$ -aplicação,  $-(i - \psi)(z) = \psi(z) - z = (i - \psi)(-z)$ . A aplicação antípoda é um homeomorfismo e tem grau não nulo. Segue da propriedade comutativa do índice de ponto fixo que

$$I(\psi, z_0) = I(\psi, -z_0).$$

O conjunto de pontos fixos da  $\psi$  pode ser descrito como  $Fix\psi = \{\pm z_0, \pm z_1, \dots, \pm z_k\}$  e a propriedade da normalização nos garante que

$$L(\psi) = \sum_i I(\psi, \pm z_i) = 2 \sum_i I(\psi, z_i).$$

Logo,  $L(\psi)$  é, necessariamente, divisível por 2. Claramente 2 não divide 1 e temos uma contradição.  $\square$

**OBSERVAÇÃO 7.1.** Na realidade, se  $G$  é um grupo finito agindo livremente e simplicialmente em um complexo simplicial finito  $X$ , então para toda  $f : X \rightarrow X$ ,  $|G|$  divide  $L(f)$ . Uma ação ser livre significa que para todo  $x \in X$ ,  $G_x := \{g \in G | gx = x\}$  é o subgrupo trivial.

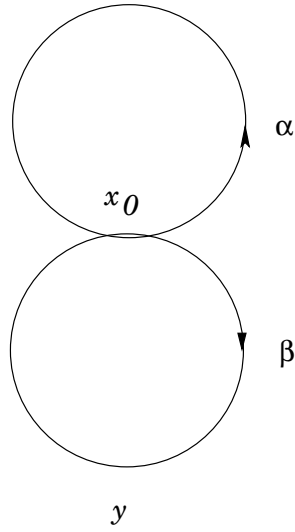


FIGURA 7

### 8. Um Exemplo Simples

Seja  $X$  a ‘figura oito’. (Veja figura abaixo.)

O grupo fundamental de  $X$  com ponto-base  $x_0$  é

$$\pi_1(X, x_0) \cong \langle \alpha, \beta \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Que é isomorfo ao grupo livre em dois geradores. Por outro lado, em dimensão um, sua homologia com coeficientes inteiros é dada por:

$$H_1(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \langle \bar{\alpha} \rangle \oplus \langle \bar{\beta} \rangle$$

onde  $\bar{\alpha}$  é a imagem de  $\alpha$  em  $H_1 = \pi_1/[\pi_1, \pi_1]$ .

Seja  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação tal que  $f_{\#}(\alpha) = \alpha^2$  e  $f_{\#}(\beta) = \beta^{-1}$  de forma que  $f$  tenha dois pontos fixos  $x_0$  e  $y$ .

Então  $\text{tr}(f_{*0}) = 1$  e

$$f_{*1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

pois  $f_{*1}(\bar{\alpha}) = 2\bar{\alpha}$  e  $f_{*1}(\bar{\beta}) = -\bar{\beta}$ .

Segue que

$$L(f) = 1 - \text{tr}(f_{*1}) = 1 - (2 - 1) = 0.$$

Veremos que o número de Nielsen  $N(f)$  é igual a 2 e portanto para qualquer aplicação  $f'$  homotópica a  $f$ ,  $Fix f' \neq \emptyset$ . Mais precisamente, os pontos fixos  $x_0$  e  $y$  de fato, pertencem a duas *classes de pontos fixos* diferentes. Uma delas tem índice  $I(f, y) = +1$  e a outra tem índice  $I(f, x_0) = -1$ .

Esse exemplo mostra que a recíproca do teorema de Lefschetz não é verdadeira em geral, i.e.,  $L(f) = 0$  não é suficiente para que possamos remover todos os pontos fixos por homotopia. Essa é a principal idéia da teoria de ponto fixo de Nielsen.

Dada uma aplicação  $f : X \rightarrow X$  tal que  $Fix f \neq \emptyset$ . Dois pontos fixos  $x, y \in Fix f$  são *Nielsen equivalentes* (como pontos fixos de  $f$ ) se existe uma curva  $C : [0, 1] \rightarrow X, C(0) = x, C(1) = y$  tal que  $f \circ C \sim C$  relativamente aos pontos extremos. (Veja figura abaixo.)

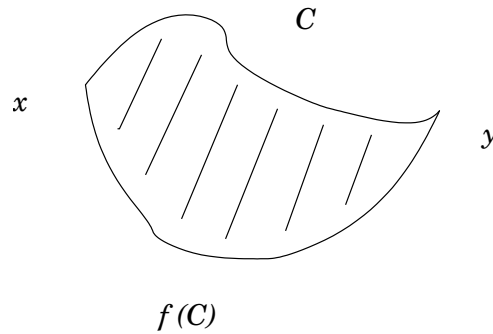


FIGURA 8

Isso produz uma relação de equivalência em  $Fix f$  e as classes de equivalência são chamadas *classes (de pontos fixos) de Nielsen*. Como  $Fix f$  é compacto, existem apenas um número finito de tais classes. Dada uma classe de pontos fixos  $\mathcal{F}$ , o índice de pontos fixos  $I(f, \mathcal{F}) := I(f, U)$  está bem definido, onde  $U$  é uma vizinhança de  $\mathcal{F}$  tal que  $U \cap Fix f = \mathcal{F}$ . A classe  $\mathcal{F}$  é dita *essencial* se  $I(f, \mathcal{F}) \neq 0$ , caso contrário ela é dita *inessencial*.

DEFINIÇÃO 8.1. O número de Nielsen de  $f$  é definido como

$$N(f) := \#\{\mathcal{F} | I(f, \mathcal{F}) \neq 0\}.$$

Ou seja, o número de Nielsen é, simplesmente, o número de classes de Nielsen essenciais.

Voltando ao exemplo da ‘figura-oito’, mostraremos que  $x_0$  e  $y$  pertencem a classes de Nielsen distintas. Para ver isso, seja  $u$  o arco de  $x_0$  até  $y$  (pelo lado direito da figura). Suponha que  $w$  é uma curva de  $x_0$  até  $y$  tal que  $w \sim f \circ w$ . Seja  $\gamma = [wu^{-1}] \in \pi_1(X, x_0)$ . Então

$$\gamma \beta f_{\#}(\gamma)^{-1} = [wu^{-1}] \beta [f \circ u] [f \circ w^{-1}] = 1.$$

Em  $H_1$ ,  $\gamma \beta f_{\#}(\gamma)^{-1}$  se projeta em  $\bar{\gamma} + \bar{\beta} - f_{*1}(\bar{\gamma})$ . Suponha  $\bar{\gamma} = a\bar{\alpha} + b\bar{\beta}$  para algum par  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Temos então

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 2b + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mas  $2b + 1 \neq 0$  pois  $b \in \mathbb{Z}$ . Logo,  $\gamma \beta f_{\#}(\gamma)^{-1}$  não pode ser homotópico ao laço trivial ou, equivalentemente,  $x_0$  e  $y$  não são Nielsen equivalentes como pontos fixos de  $f$ .



## Terceira Parte

### 9. Teoria de Pontos Fixos de Nielsen

A partir do exemplo simples visto anteriormente, percebemos que a idéia de classes de pontos fixos pode ser usada para explicar um comportamento mais sutil do que o detectado pela teoria de Lefschetz. Lembramos que o número de Nielsen é o número de classes de Nielsen essenciais. Nessa seção discutiremos algumas propriedades básicas do número de Nielsen.

$$(1) 0 \leq N(f) \leq \#Fixf.$$

Por definição  $N(f)$  é um inteiro não negativo. Como cada classe de Nielsen contém pelo menos um ponto fixo de  $f$ , temos que  $N(f) \leq \#Fixf$ .

$$(2) \text{ Se } f' \sim f \text{ então } N(f') = N(f).$$

Para mostrar que o número de Nielsen é um invariante homotópico tomamos  $\{f_t\}$  como uma homotopia tal que  $f_0 = f$  e  $f_1 = f'$ . Consideramos a aplicação  $F : X \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1]$  dada por  $F(x, t) = (f_t(x), t)$ .

Note que  $(x, t) \in FixF$  se, e somente se,  $x \in Fixf_t$ . Sejam  $\mathcal{F}$  uma classe de pontos fixos de  $F$  que contém  $(x_0, 0)$ ;  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \cap (X \times \{0\})$  e  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \cap (X \times \{1\})$ . Além disso, denotaremos  $\mathbb{F}_0 = pr_1(\mathcal{F}_0)$  e  $\mathbb{F}_1 = pr_1(\mathcal{F}_1)$  onde  $pr_1$  é a projeção sobre  $X$ .

Observe que  $\mathbb{F}_0$  é uma classe de pontos fixos de  $f_0$  e  $\mathbb{F}_1$  é uma classe de pontos fixos de  $f_1$  (com a possibilidade de ser vazia).

Pela invariância homotópica do índice de pontos fixos, temos que

$$I(f_0, \mathbb{F}_0) = I(f_1, \mathbb{F}_1).$$

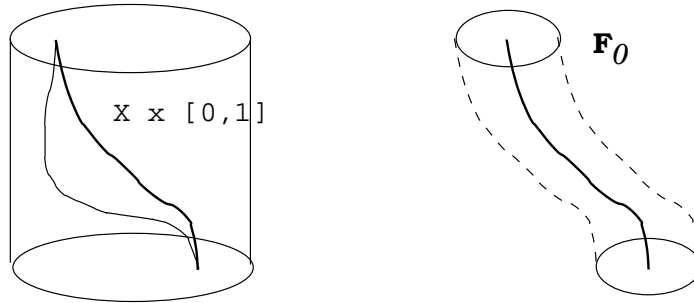


FIGURA 9

O que implica que  $N(f)$  é um invariante homotópico. Diferentemente do número de Lefschetz  $L(f)$ , que quando não é nulo implica na existência de algum ponto fixo,  $N(f)$  pode garantir a existência de um certo número de pontos fixos desde que sejamos capazes de calcular  $N(f)$ . Originalmente, J. Nielsen usou essa idéia de classes de pontos fixos para estudar automorfismos de superfícies.

O seguinte resultado, de F. Wecken, transformou o número de Nielsen em um importante objeto de estudo.

**TEOREMA 9.1.** *Suponha que  $X$  é uma variedade triangulada, conexa e compacta de dimensão pelo menos 3. Para toda  $f : X \rightarrow X$ , existe uma aplicação  $f'$  homotópica a  $f$  tal que  $\#Fix f' = N(f)$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** (Idéia) (1) Deforme  $f$  para  $f_1$  tal que  $\#Fix f_1 < \infty$ .

(2) Se  $x \in Fix f_1$  tem índice 0 então podemos remover  $x$  localmente, i.e., existe  $f_2 \sim f_1$  tal que para todo  $y \in Fix f_2, I(f_2, y) \neq 0$ .

(3) Suponha que  $x$  e  $y$  pertençam a mesma classe de Nielsen, i.e., existe uma curva  $C : [0, 1] \rightarrow X, C(0) = x, C(1) = y$  tal que  $f \circ C \sim C$ . Escolha uma vizinhança contráctil  $U$  de  $C$  (Podemos assumir que  $U$  não contém outros pontos fixos). (Veja figura abaixo.)

Deforme  $f_2$  para  $f'_2$  relativamente a  $X - U$  de maneira que  $Fix f'_2 = Fix f_2 - \{y\}$ . (Note que o índice local de  $f'_2$  em  $x$  é diferente do de  $f_2$  no mesmo ponto.) Repetindo esse processo um número finito de vezes

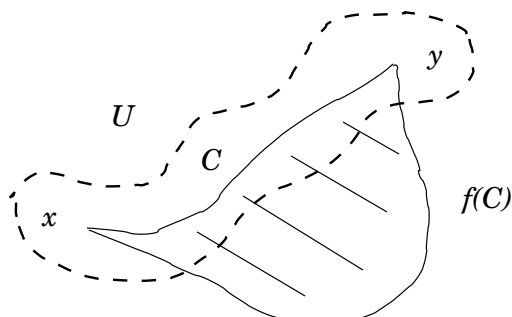


FIGURA 10

chegaremos a uma aplicação  $f' \sim f$  para a qual cada classe de Nielsen de  $f'$  tem exatamente um ponto fixo que terá índice não nulo.  $\square$

Na prática precisamos utilizar técnicas algébricas para calcular  $N(f)$ . Apresentaremos, a seguir, a teoria de pontos fixos de Nielsen do ponto de vista de espaços de recobrimento.

### 10. Abordagem por Espaços de Recobrimento

Seja  $X$  um poliedro conexo e compacto. Denotaremos por  $\eta : \tilde{X} \rightarrow X$  o recobrimento universal de  $X$ . Supondo que  $f : X \rightarrow X$  é uma aplicação e sendo  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  um levantamento de  $f$  para o recobrimento universal, temos que

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X} \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

é comutativo.

O grupo das transformações de deck de  $\eta$  é o conjunto de todos os levantamentos da identidade  $1_X$ . Denotaremos tal conjunto por  $Cov\eta$  (grupo das transformações de recobrimento).

Escolhemos um ponto base  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  e um  $\alpha \in Cov\eta$ . Pela unicidade do levantamento, existe um único elemento  $\tilde{\alpha} \in Cov\eta$  tal que

$$\tilde{\alpha}(\tilde{f}(\tilde{x}_0)) = \tilde{f}(\alpha(\tilde{x}_0)).$$

Olhando para a associação  $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$  como  $\varphi : Cov\eta \rightarrow Cov\eta$ . Temos que

$$\tilde{f}\alpha = \varphi(\alpha)\tilde{f}, \quad \text{para todo } \alpha \in Cov\eta.$$

Se  $\beta \in Cov\eta$ , então

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\tilde{f} = \varphi(\alpha)\tilde{f}\beta = (\tilde{f}\alpha)\beta = \tilde{f}(\alpha\beta) = \varphi(\alpha\beta)\tilde{f}$$

o que implica que  $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$  assim  $\varphi$  é um homomorfismo de grupo.

Note que se  $\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{x}$  então  $\eta\tilde{f}(\tilde{x}) = \eta\tilde{x}$  e então  $\eta\tilde{x} = f\eta(\tilde{x})$ . Ou seja,  $\eta(\tilde{x}) \in Fixf$ . Logo, os pontos fixos dos levantamentos da  $f$  se projetam sobre pontos fixos da  $f$ .

EXEMPLO 10.1. Tomando  $X = S^1$  e assim  $\tilde{X} = \mathbb{R}$ . Seja  $f : S^1 \rightarrow S^1$  definida como

$$f(e^{it}) = e^{i(\pi-t)}.$$

Suponha que tenhamos  $\tilde{f}_k(t) = -t + k\pi$  onde  $k \in \mathbb{Z}$ . Então  $\tilde{f}_k$  é um levantamento de  $f$  se, e somente se,  $\eta\tilde{f}_k(t) = f\eta(t) = e^{i(\pi-t)}$ . O que é equivalente a  $\eta(-t + k\pi) = e^{-it}e^{ik\pi} = e^{i(\pi-t)}$  o que é o mesmo que dizer que  $k$  deve ser ímpar. Quando  $k = 1$ ,  $Fix\tilde{f}_1 = \{\frac{\pi}{2}\}$ . Para  $k = 5$ ,  $Fix\tilde{f}_5 = \{\frac{5\pi}{2}\}$ . Além disso,

$$\eta Fix\tilde{f}_1 = \{e^{i\pi/2}\} = \eta Fix\tilde{f}_5$$

portanto, levantamentos diferentes podem produzir os mesmos pontos fixos de  $f$ .

Em geral, se  $\tilde{f}$  é um levantamento e  $\gamma \in Cov\eta$  então

$$\eta Fix\tilde{f} = \eta Fix(\gamma\tilde{f}\gamma^{-1}).$$

Isso é uma consequência do fato que  $\eta\tilde{x} = \eta\gamma\tilde{x}$  e que

$$\tilde{x} = \tilde{f}(\tilde{x}) \Leftrightarrow \gamma\tilde{f}\gamma^{-1}(\gamma\tilde{x}) = \gamma\tilde{x}.$$

Na realidade,

$$\eta \text{Fix} \tilde{f} = \eta \text{Fix} \tilde{f}' \Rightarrow \tilde{f}' = \gamma \tilde{f} \gamma^{-1}$$

para algum  $\gamma \in \text{Cov}\eta$ .

Denotaremos por  $[\tilde{f}]$  a classe de equivalência que contém  $\tilde{f}$  pela relação

$$[\tilde{f}_1] = [\tilde{f}_2] \Leftrightarrow \tilde{f}_2 = \gamma \tilde{f}_1 \gamma^{-1}$$

para algum  $\gamma \in \text{Cov}\eta$ . Assim *classes de levantamentos* diferentes produzem diferentes pontos fixos de  $f$ . Especificamente temos que

$$\text{Fix} f = \bigsqcup_{[\tilde{f}]} \eta \text{Fix} \tilde{f},$$

i.e.,  $\text{Fix} f$  é a união disjunta da projeção dos pontos fixos de levantamentos de classes de levantamentos distintas.

## 11. Classes de Reidemeister

Fixando um levantamento  $\tilde{f}$ , obtemos um homomorfismo  $\varphi : \text{Cov}\eta \rightarrow \text{Cov}\eta$  tal que

$$\tilde{f}\gamma = \varphi(\gamma)\tilde{f}, \quad \text{for all } \gamma \in \text{Cov}\eta.$$

Como todo levantamento de  $f$  é da forma  $\alpha\tilde{f}$ , perguntamos quando dois levantamentos pertencem à mesma classe de levantamentos. Se  $\alpha, \beta \in \text{Cov}\eta$ . Então

$$\begin{aligned} [\alpha\tilde{f}] = [\beta\tilde{f}] &\Leftrightarrow \beta\tilde{f} = \gamma(\alpha\tilde{f})\gamma^{-1} \quad \text{para algum } \gamma \in \text{Cov}\eta \\ &\Leftrightarrow \beta\tilde{f} = \gamma\alpha(\tilde{f}\gamma^{-1}) = \gamma\alpha\varphi(\gamma)^{-1}\tilde{f}. \end{aligned}$$

Pela unicidade de levantamentos temos que

$$(11.1) \quad [\alpha\tilde{f}] = [\beta\tilde{f}] \Leftrightarrow \beta = \gamma\alpha\varphi(\gamma)^{-1}$$

para algum  $\gamma \in \text{Cov}\eta$ .

Mais do que isso, escolhendo pontos base apropriados,  $\varphi$  pode ser identificada com  $f_{\#}$  em  $\pi_1$  (podemos também identificar  $\text{Cov}\eta$  com  $\pi_1$ ). A partir de agora escreveremos  $\pi$  para ambos,  $\text{Cov}\eta$  e  $\pi_1(X)$ .

Usando (11.1), definimos a *ação de Reidemeister* (de  $\pi$  em  $\pi$ ) como

$$(11.2) \quad \gamma \bullet \alpha \mapsto \gamma\alpha\varphi(\gamma)^{-1}$$

As órbitas da ação (11.2) são chamadas de *classes de Reidemeister*. Segue de (11.1) que temos uma correspondência biunívoca entre as classes de levantamentos e as classes de Reidemeister.

**OBSERVAÇÃO 11.1.** Se escolhermos um levantamento  $\tilde{f}'$  diferente e, portanto, um homeomorfismo diferente  $\varphi'$ , teremos uma bijeção entre as  $\varphi$ -classes de Reidemeister e as  $\varphi'$ -classes de Reidemeister, logo a cardinalidade de tais conjuntos é constante. Definimos  $R(\varphi)$  como a cardinalidade do conjunto de  $\varphi$ -classes de Reidemeister.  $R(\varphi)$  é chamado de *número de Reidemeister* de  $\varphi$ . O número de Reidemeister de uma aplicação  $f$ , denotado por  $R(f)$  é simplesmente  $R(\varphi)$ , ou seja, a cardinalidade do conjunto de classes de levantamentos.

**11.1. Relação com  $N(f)$ .** Seja  $\tilde{f}$  um levantamento de  $f$  para o recobrimento universal. Suponha que  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \text{Fix}\tilde{f}$  se projetam em diferentes pontos fixos  $x_1, x_2$  respectivamente. Escolhemos uma curva  $\tilde{C} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $\tilde{C}(0) = \tilde{x}_1, \tilde{C}(1) = \tilde{x}_2$ . Então  $C := \eta \circ \tilde{C} : [0, 1] \rightarrow X$  é uma curva de  $x_1$  até  $x_2$  e a curva  $\tilde{f} \circ \tilde{C}$  se projeta sobre a curva  $f \circ C$  pois  $\eta(\tilde{f} \circ \tilde{C}) = f \circ \eta \circ \tilde{C} = f \circ C$ . O laço  $\tilde{C}(\tilde{f} \circ \tilde{C})^{-1}$  se projeta sobre o laço  $C(f \circ C)^{-1}$ . Como  $\tilde{X}$  é simplesmente conexo,  $\tilde{C}(\tilde{f} \circ \tilde{C})^{-1}$  é trivial em  $\pi_1$  e assim  $C(f \circ C)^{-1}$  é homotópico ao laço trivial, i.e.,  $f \circ C \sim C$ . Ou seja,  $x_1$  e  $x_2$  são Nielsen equivalentes.

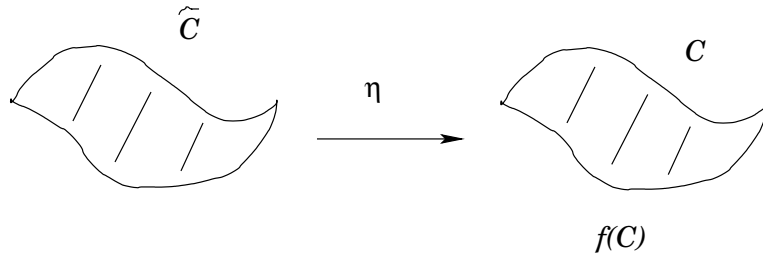


FIGURA 11

Reciprocamente, Suponha que  $x_1, x_2 \in \text{Fix}f$  são Nielsen equivalentes, i.e., existe uma curva  $C$  de  $x_1$  até  $x_2$  tal que  $f \circ C \sim C$ . Seja  $\tilde{f}$  um levantamento de  $f$  e  $\tilde{x}_1 \in \text{Fix}\tilde{f}$  tais que  $\eta(\tilde{x}_1) = x_1$ . Levantamos

$C$  a uma curva  $\tilde{C}$  com início em  $\tilde{x}_1$  e que termina em  $\tilde{x}_2$ . Então  $\tilde{f} \circ \tilde{C}$  se projeta sobre  $f \circ C$  que é homotópica a  $C$ . Portanto,  $\tilde{f} \circ \tilde{C}$  também termina em  $\tilde{x}_2$  e assim  $\tilde{f}(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_2$ .

Se tomarmos  $\mathcal{N}(f)$  e  $\mathcal{R}(f)$  denotando o conjunto de classes de Nielsen e o conjunto de classes de Reidemeister respectivamente, então os argumentos acima mostram que existe uma injeção

$$\mathcal{N}(f) \hookrightarrow \mathcal{R}(f)$$

O que implica que  $N(f) \leq R(f)$ . É interessante distinguir as classes (não vazias) de Nielsen das classes de Reidemeister. Denotaremos  $\eta\text{Fix}f$  uma *classe de pontos fixos* de  $f$  (que pode ser vazia). Essa classe corresponde à classe de levantamento  $[\tilde{f}]$  e à classe de Reidemeister [1] pois fixamos o levantamento  $\tilde{f}$  e conseqüentemente consideramos as  $\varphi$ -classes de Reidemeister. Devemos destacar que  $R(f)$  não precisa ser finito quando  $N(f) < \infty$ . Por exemplo, se  $f = 1_X$  então quaisquer dois pontos (fixos por  $1_X$ ) são Nielsen equivalentes, assim  $N(f) \leq 1$ . Mas as classes de Reidemeister são, simplesmente as classes de conjugação. Em particular, se  $\pi_1(X)$  é abeliano então  $R(1_X) = |\pi_1(X)|$ .

## 12. Cálculo do número de Nielsen

Começaremos com a seguinte pergunta: *Como calculamos o número de Nielsen?*

Existem algumas situações fáceis: se  $f = 1_X$  ou se  $X$  é simplesmente conexo então existe somente uma classe de Nielsen e  $N(f) \leq 1$ . Nesses casos  $L(f) = 0 \Rightarrow N(f) = 0$  ou  $L(f) \neq 0 \Rightarrow N(f) = 1$ . Claramente, se  $f = 1_X$  então  $L(f) = \chi(X)$ . Nesse contexto, o número de Nielsen não nos fornece mais informações do que o número de Lefschetz.

Em 1942, W. Franz provou que se  $X$  é o ‘lens space’ clássico então para toda auto-aplicação  $f : X \rightarrow X$ , todas as classes de Nielsen têm o mesmo índice de pontos fixos. Na realidade temos

- (1)  $L(f) = 0 \Rightarrow N(f) = 0$  e nesse caso  $f \sim f'$  com  $\text{Fix}f' = \emptyset$ ;
- (2)  $L(f) \neq 0 \Rightarrow N(f) = R(f) = \#\text{Coker}(1 - f_{*1})$ .

Inicialmente relembremos a definição de ‘lens spaces’. Considere a esfera 3-dimensional

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

Se  $\mathbb{Z}_p$  é o grupo cíclico de ordem  $p$ , com  $p$  um primo ímpar. Então  $\mathbb{Z}_p$  age livremente em  $S^3$  por

$$\zeta \bullet (z_1, z_2) \mapsto (\zeta z_1, \zeta z_2)$$

onde  $\zeta = e^{2\pi i/p}$ . O espaço de órbitas  $S^3/\mathbb{Z}_p =: L_p$  é o ‘lens space’ com  $\pi_1(L_p) \cong \mathbb{Z}_p$ . A aplicação canônica  $\eta : S^3 \rightarrow L_p$  é um recobrimento regular com  $p$ -folhas.

Considere um levantamento  $\tilde{f}$ , então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{\tilde{f}} & S^3 \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ L_p & \xrightarrow{f} & L_p \end{array}$$

é comutativo. Para todo  $\alpha \in \text{Cov}\eta$ ,  $\eta \circ \alpha \tilde{f} = f \circ \eta$ . Como  $\text{deg } \eta = p \neq 0$ , temos que  $\text{deg}(\alpha \tilde{f}) = \text{deg } f$ . Logo,  $\text{deg}(\alpha \tilde{f})$  é independente de  $\alpha$ . por um teorema clássico de H. Hopf, concluímos que  $\alpha \tilde{f} \sim \tilde{f}$  para todo  $\alpha$ . Essa homotopia, por sua vez, implica que  $I(f, \eta \text{Fix} \alpha \tilde{f}) = I(f, \eta \text{Fix} \tilde{f})$  então se uma classe é essencial todas as classes serão essenciais e  $L(f) \neq 0 \Rightarrow N(f) = R(f)$ .

Se uma classe é inessencial todas as classes serão inessenciais, logo  $L(f) = 0 \Rightarrow N(f) = 0$ .

(Veja as figuras abaixo.)

A igualdade  $R(f) = \# \text{Coker}(1 - f_{*1})$  é conseqüência do fato de que  $\pi_1$  é abeliano e portanto isomorfo a  $H_1$ . Mais precisamente, como  $\pi_1(X) = H_1(X)$ ,  $\gamma \alpha \varphi(\gamma)^{-1} = \bar{\gamma} + \bar{\alpha} - f_{*1}(\bar{\gamma}) = \bar{\alpha} + (1 - f_{*1})(\bar{\gamma})$ . A ação de Reidemeister pode ser escrita como

$$\bar{\alpha} \mapsto \bar{\alpha} + (1 - f_{*1})(\bar{\gamma})$$

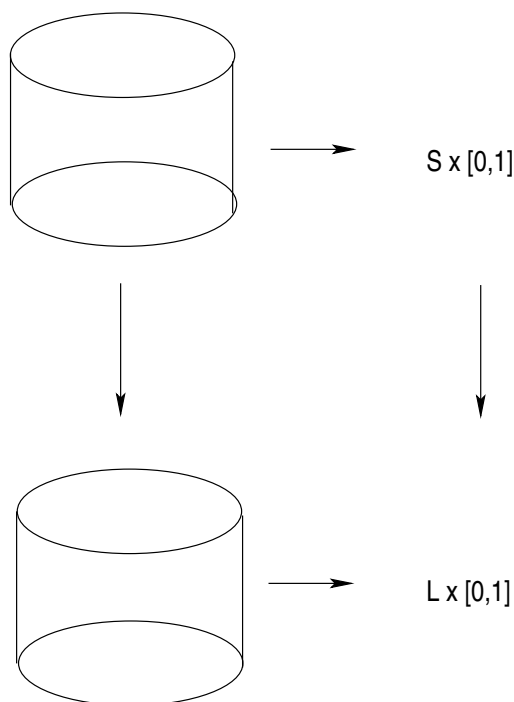


FIGURA 12

ou

$$H_1(X) \rightarrow H_1(X)/\text{Im}(1 - f_{*1}) = \text{Coker}(1 - f_{*1}).$$

Tal fenômeno influenciou B. Jiang (1963) a estabelecer as chamadas condições de Jiang, sob as quais todas as classes de pontos fixos têm o mesmo índice.

Definimos

$$J(X) := \{\sigma \in \pi \mid \sigma\alpha = \alpha\sigma \text{ para todo } \alpha \in \pi \text{ e } \sigma \sim 1_{\tilde{X}}\}.$$

Por definição,  $J(X)$  é um subgrupo central de  $\pi \equiv \text{Cov}\eta \equiv \pi_1(X)$ . Um espaço  $X$  é dito um *espaço de Jiang* se  $J(X) = \pi$ . Sendo  $\tilde{f}$  um levantamento de  $f$ . Para todo  $\alpha \in \pi$ , se  $J(X) = \pi$  então  $\alpha \sim 1_{\tilde{X}}$  e então  $\alpha\tilde{f} \sim \tilde{f}$ . Logo, as classes de pontos fixos  $\eta\text{Fix}\alpha\tilde{f}$  e  $\eta\text{Fix}\tilde{f}$  têm o mesmo índice de pontos fixos. Dessa forma temos o seguinte resultado.

TEOREMA 12.1. *Suponha que um poliedro conexo e compacto  $X$  seja um espaço de Jiang. Então para toda auto-aplicação  $f : X \rightarrow X$ ,*

$$(12.1) \quad \begin{aligned} (1) \quad & L(f) = 0 \Rightarrow N(f) = 0; \\ (2) \quad & L(f) \neq 0 \Rightarrow N(f) = R(f) = \#Coker(1 - f_{*1}). \end{aligned}$$

Espaços de Jiang incluem (1) espaços simplesmente conexos; (2) ‘lens spaces’ (ou ‘lens spaces’ generalizados); (3) grupos de Lie e  $H$ -espaços; (4) espaços de classes laterais  $G/G_0$  onde  $G$  é um grupo de Lie conexo e compacto e  $G_0$  é um subgrupo conexo.

Enquanto a classe de espaços de Jiang contém vários espaços bem conhecidos, qualquer  $X$  com grupo fundamental não abeliano não pode ser um espaço de Jiang.

Como nosso objetivo é calcular  $N(f)$ , os efeitos das condições de Jiang podem ser obtidos se pudermos garantir que as classes de pontos fixos são, ou todas essenciais (ou tenham o mesmo sinal) ou são todas inessenciais. Com isso em vista, B. Jiang obteve uma pequena generalização.

TEOREMA 12.2. *Seja  $X$  um poliedro conexo e compacto com grupo fundamental finito  $\pi \cong Cov\eta$ . Se para cada  $\alpha \in \pi$ , o homomorfismo induzido  $\alpha_* : H_*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(X; \mathbb{Q})$  for a identidade então para toda  $f : X \rightarrow X$ , (1)  $L(f) = 0 \Rightarrow N(f) = 0$ ; (2)  $L(f) \neq 0 \Rightarrow N(f) = R(f)$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $\tilde{f}$  um levantamento de  $f$ . Sob essas hipóteses,  $(\alpha\tilde{f})_* = \tilde{f}_*$  e temos que  $L(\alpha\tilde{f}) = L(\tilde{f})$ . Note que o recobrimento universal  $\tilde{X}$  é também um poliedro compacto. O conjunto de pontos fixos  $Fix\tilde{f}$  se projeta como uma classe de pontos fixos  $\mathbb{F}$  de  $f$ . Logo,  $L(\tilde{f})$  é um múltiplo inteiro de  $I(f, \mathbb{F})$  tal que  $L(\tilde{f})$  e  $I(f, \mathbb{F})$  têm o mesmo sinal. concluimos, assim que todas as classes de pontos fixos têm índices de pontos fixos com o mesmo sinal.  $\square$

Quando  $\pi$  é infinito e não abeliano, o cálculo, em geral, do número de Nielsen ainda é um desafio. Recentemente alguns progressos foram obtidos para espaços de classes laterais de um grupo de Lie conexos

e compactos, bem como para certos espaços  $\mathcal{C}$ -nilpotentes onde  $\mathcal{C}$  é a classe dos grupos finitos.

Chamamos  $X$  em espaço do *tipo Jiang* se as conclusões do teorema 12.2 são verdadeiras para todas as auto-aplicações de  $X$ .

Em 1984, D. Anosov mostrou que para qualquer auto-aplicação  $f : N \rightarrow N$  de uma nilvariedade compacta  $N$ ,  $N(f) = |L(f)|$ . Realmente, podemos mostrar que nilvariedades são espaços do tipo Jiang. Uma nilvariedade compacta é o espaço das classes laterais  $G/\Gamma$  onde  $G$  é um grupo de Lie conexo, simplesmente conexo e nilpotente e  $\Gamma$  é um subgrupo discreto, assim  $G/\Gamma$  é compacto. O exemplo mais simples de tais espaços são as 3-variedades de Heisenberg.

EXEMPLO 12.1. Sejam

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

e

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

A operação de grupo em  $G$  é a multiplicação usual de matrizes. Como grupo,  $G$  é não abeliano e nilpotente e como espaço topológico,  $G$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^3$ . O espaço das classes laterais  $G/\Gamma$  é uma nilvariedade compacta 3-dimensional. A mesma construção em dimensão 2 produz o toro  $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Nesse caso,  $\pi_1(G/\Gamma) \cong \Gamma$  é nilpotente, finitamente gerado e livre de torção.

O teorema de Anosov teve como resultado várias generalizações e outras investigações as quais têm um papel bastante ativo na pesquisa atual em teoria topológica de pontos fixos.

OBSERVAÇÃO 12.1. O grupo  $J(X)$  também é conhecido como (primeiro) subgrupo de Gottlieb.

Podemos notar que o grupo fundamental desempenha um papel importante na teoria de pontos fixos de Nielsen. Os cálculos necessariamente envolvem  $\pi_1$  e espaços de recobrimento (universais). Por

outro lado o número de Lefschetz é homológico por natureza, sendo a soma de todos os índices de pontos fixos de todas as classes de pontos fixos. Portanto é desejável encontrar um invariante que possa incorporar as informações, tanto homológicas (Lefschetz) como geométricas (Nielsen).

## Quarta Parte

### 13. O traço de Reidemeister

Em 1936, K. Reidemeister estudou a teoria de pontos fixos de Nielsen do ponto de vista algébrico, usando recobrimento universal. Definiremos um tipo de ‘traço’ que é capaz de capturar ambos,  $N(f)$  e  $L(f)$ .

Seja  $X$  um poliedro conexo e compacto e  $f : X \rightarrow X$  uma auto-aplicação. Supomos que  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  é um levantamento de  $f$ . Notamos que  $\tilde{X}$  herda uma estrutura simplicial de  $X$ . O complexo de cadeia simplicial  $\{C_p(\tilde{X}), \partial\}$  está definido e  $C_p(\tilde{X})$  é gerado pelos  $p$ -simplexos orientados de  $\tilde{X}$ .

Novamente identificamos  $\pi = \pi_1 X \cong \text{Cov}\eta$ . Se  $\alpha \in \pi$  e  $b \in X$  então  $\alpha : \eta^{-1}(b) \rightarrow \eta^{-1}(b)$ . Mais precisamente, para todo par  $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2 \in \eta^{-1}(b)$ , existe um único  $\alpha \in \pi$  tal que  $\tilde{b}_2 = \alpha(\tilde{b}_1)$ . Podemos imaginar  $C_p(\tilde{X})$  como uma coleção de  $\pi$ -equivariantes  $p$ -simplexos gerados pelos  $p$ -simplexos de  $X$ . Como  $X$  é compacto,  $C_p(\tilde{X})$  é um  $\mathbb{Z}\pi$ -módulo livre finitamente gerado. Onde  $\mathbb{Z}\pi$  é o anel de grupo sobre os inteiro de  $\pi$ , i.e., um elemento típico é da forma  $\sum n_\alpha \alpha$ ,  $n_\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \in \pi$  e todos exceto um número finito dos  $n_\alpha$  são zero. Uma  $\mathbb{Z}\pi$  base para  $C_p(\tilde{X})$  é uma coleção de  $p$ -simplexos  $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_k$  cada um correspondendo a um  $p$ -simplexo distinto  $\sigma_i$  em  $X$ . Escolhendo uma  $\mathbb{Z}\pi$  base, a aplicação de cadeia

$$\tilde{f}_{\#p} : C_p(\tilde{X}) \rightarrow C_p(\tilde{X})$$

tem uma matriz  $\mathcal{M}_p$  e o traço  $\text{tr}\mathcal{M}_p$  é um elemento do anel de grupo  $\mathbb{Z}\pi$ . Fixando um levantamento  $\tilde{f}$ , obtemos um homomorfismo  $\varphi : \pi \rightarrow \pi$ .

Denotaremos por  $\mathcal{R}_\varphi[\pi]$  o conjunto de órbitas da ação de Reidemeister

$$\sigma \bullet \alpha \mapsto \sigma \alpha \varphi(\sigma)^{-1}.$$

Seja  $\rho : \pi \rightarrow \mathcal{R}_\varphi[\pi]$  a projeção nas órbitas, que podemos estender linearmente para  $\rho : \mathbb{Z}\pi \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{R}_\varphi[\pi]$ .

O *Traço de Reidemeister* de  $f$  (também conhecido como número de Lefschetz generalizado) com respeito a  $\tilde{f}$  é dado por

$$(13.1) \quad \mathfrak{L}_\pi(f, \tilde{f}) := \sum_{q=0} (-1)^q \rho \circ \text{tr} \mathcal{M}_q \in \mathbb{Z}\mathcal{R}_\varphi[\pi].$$

Tal “traço” é definido no recobrimento universal, assim ele detecta os pontos fixos dos levantamentos de  $f$ . Suponha que  $\tilde{x}$  é um ponto fixo de  $\tilde{f}$  que recobre o ponto fixo  $x$  de  $f$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $f$  tem somente um número finito de pontos fixos, cada um deles no interior de um simplexo maximal.

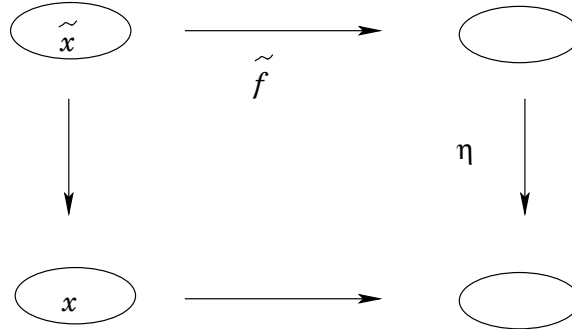


FIGURA 13

Como  $\eta$  é um homeomorfismo local, concluímos que

$$I(\tilde{f}, \tilde{x}) = I(f, x).$$

Lembramos que levantamentos da forma  $\gamma \tilde{f} \gamma^{-1}$  também têm pontos fixos que se projetam sobre  $x$ . Assim, passando para  $\mathcal{R}_\varphi[\pi]$ , podemos contar sua contribuição para o traço uma única vez.

Similarmente ao Teorema de Lefschetz-Hopf, temos a seguinte representação do traço de Reidemeister, feita por Wecken.

TEOREMA 13.1.

$$\mathfrak{L}_\pi(f, \tilde{f}) := \sum_{\rho \in \mathcal{R}_\varphi[\pi]} i_\rho \rho \quad i_\rho \in \mathbb{Z}$$

onde  $\rho$  é a classe de Reidemeister cuja classe de Nielsen correspondente tem índice de ponto fixo  $i_\rho$ .

Observe que se  $\rho$  corresponde a uma classe de Nielsen vazia então  $i_\rho = 0$ . A representação de Wecken do Teorema 13.1 implica que  $N(f) = \#\{\rho | i_\rho \neq 0\}$  e  $L(f) = \sum i_\rho$ . Portanto,  $\mathfrak{L}_\pi(f, \tilde{f})$  captura informações de  $N(f)$  e de  $L(f)$ . Além disso, o traço de Reidemeister tem o mesmo tipo de propriedades que o número (usual) de Lefschetz.

#### 14. Um Exemplo

Vamos calcular o traço de Reidemeister para uma aplicação do toro bidimensional.

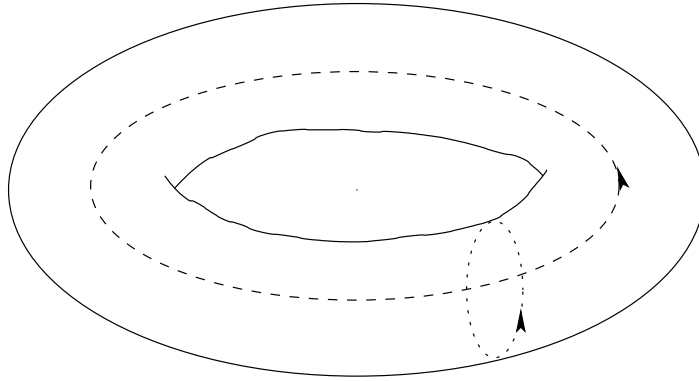


FIGURA 14

Denotamos  $T^2 = S^1 \times S^1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , com grupo fundamental

$$\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle \alpha \rangle \oplus \langle \beta \rangle.$$

Seja  $f : T^2 \rightarrow T^2$  uma aplicação cujo homomorfismo induzido em  $\pi_1$  é dado por  $\varphi$  que leva  $\alpha \mapsto \beta^2 \alpha^{-1}$  e  $\beta \mapsto \beta \alpha^{-1}$ . Tomamos o levantamento  $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado pela aplicação linear  $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Considere as

células:

$$\tilde{e}_0 = (0, 0) \quad \tilde{e}_1^1 = (s, 0), \tilde{e}_1^2 = (0, t)$$

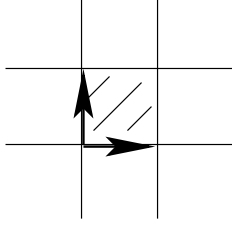


FIGURA 15

e o quadrado  $\tilde{e}_2 = (s, t), 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ .

Então

$$\tilde{f}_{\#0}(\tilde{e}_0) = \tilde{e}_0;$$

$$\tilde{f}_{\#0}(\tilde{e}_1^1) = -(\beta^2 \alpha^{-1})\tilde{e}_1^1 + (1 + \beta)\tilde{e}_1^2;$$

$$\tilde{f}_{\#0}(\tilde{e}_1^2) = -\alpha^{-1}\tilde{e}_1^1 + \alpha^{-1}\tilde{e}_1^2;$$

$$\tilde{f}_{\#0}(\tilde{e}_2) = (\alpha^{-1} + \alpha^{-1}\beta - \alpha^{-2}\beta^2)\tilde{e}_2.$$

Para verificar tais resultados considere as 1-células:

$$\text{Como } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

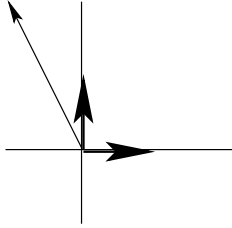


FIGURA 16

temos que

$$\tilde{f}_{\#1}(\tilde{e}_1^1) = -(\beta^2 \alpha^{-1})\tilde{e}_1^1 + (1 + \beta)\tilde{e}_1^2.$$

$$\text{De maneira análoga, } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

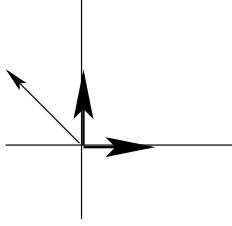


FIGURA 17

de onde segue que

$$\tilde{f}_{\#0}(\tilde{e}_1^2) = -\alpha^{-1}\tilde{e}_1^1 + \alpha^{-1}\tilde{e}_1^2.$$

Podemos determinar as imagens das 0-células e das 2-células de maneira similar.

Portanto,

$$(14.1) \quad \mathfrak{L}_\pi(f, \tilde{f}) = [1] - (-[\beta^2\alpha^{-1}] + [\alpha^{-1}]) + ([\alpha^{-1}] + [\beta\alpha^{-1}] - [\beta^2\alpha^{-2}]).$$

Agora a questão é: (14.1) é a representação de Wecken como no Teorema 13.1?

Precisaremos calcular as classes de Reidemeister em  $\mathcal{R}_\varphi[\pi]$ . Inicialmente, notamos que

$$\varphi(\alpha) = \beta^2\alpha^{-1} \quad \text{e} \quad \varphi(\beta) = \beta\alpha^{-1}.$$

Como  $\pi$  é abeliano, se  $\sigma \in \pi$  então  $\sigma = \alpha^m\beta^n$  para algum  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \sigma\alpha\varphi(\sigma)^{-1} &= \alpha^m\beta^n\alpha\varphi(\alpha^{-m}\beta^{-n}) \\ &= \alpha^m\beta^n\alpha\beta^{-2m}\alpha^m\beta^{-n}\alpha^n \\ &= \alpha^{n+1}\beta^{-2m} \end{aligned}$$

ou  $\sigma\varphi(\sigma)^{-1} = \alpha^n\beta^{-2m}$ .

O que significa que a unidade 1 e qualquer elemento da forma  $\alpha^n\beta^{\text{par}}$  estão na mesma classe de Reidemeister. Assim,

$$\mathcal{R}_\varphi[\pi] = \{[1], [\beta]\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

Além disso,

$$[\beta^2\alpha^{-1}] = [1] = [\alpha^{-1}] = [\alpha] = [\beta^2\alpha^{-2}]$$

e

$$[\beta\alpha^{-1}] = [\beta].$$

Concluimos que

$$\mathfrak{L}_\pi(f, \tilde{f}) = [1] + [\beta]$$

o que implica que  $L(f) = 2$  e  $N(f) = 2$ .

No caso de uma superfície orientável de genus  $g > 1$ ,  $X = \sum^g$ ,  $\pi_1(X)$  é gerado por  $2g$  elementos que satisfazem uma relação. Usando derivada de Fox em anéis de grupos sobre os inteiros, E. Fadell e S. Husseini calcularam o traço de Reidemeister, mostrando que

$$\mathfrak{L}_\pi(f, \tilde{f}) = \rho(1 - \sum_i \frac{\partial f_{\#}(a_i)}{\partial a_i} + A)$$

onde  $(\frac{\partial f_{\#}(a_i)}{\partial a_j}) = J(\varphi)$  é a matriz Jacobiana e  $A \in \mathbb{Z}\pi$  é tal que  $A(\nabla R) = \varphi(\nabla R)J(\varphi)$ , sendo  $R$  a relation.

A parte mais difícil desses cálculos é obter a capacidade de exprimir o traço de Reidemeister na representação de Wecken, i.e., a capacidade de distinguir classes de Reidemeister distintas.

## 15. Aplicações à Dinâmica

Em sistemas dinâmicos discretos, dado um homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$ , são estudados os pontos periódicos de  $f$ , i.e., pontos  $x$  tais que  $f^n(x) = x$  para algum inteiro positivo  $n$ . Em geral, os dinamicistas se interessam pelo comportamento ‘a longo prazo’ de um sistema dinâmico e portanto no comportamento periódico de forma assintótica. Ao invés de estudar  $Fix f^n$  para um  $n$  fixado, gostaríamos de estudar *todos* os pontos periódicos de uma vez. Para tanto precisamos ser capazes de *visualizar* todas as órbitas periódicas em um mesmo lugar.

Seja  $X$  um espaço topológico e  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação. O ‘mapping torus’ de  $f$  é o espaço quociente

$$T_f := X \times [0, \infty) / (x, s+1) \sim (f(x), s)$$

com  $x \in X, s \in [0, \infty)$ .

Existe um *semi-fluxo* natural em  $T_f$  dado pela aplicação  $\varphi : T_f \times [0, \infty) \rightarrow T_f, \varphi_t(x, s) = (x, s+t), \forall t \geq 0$ .

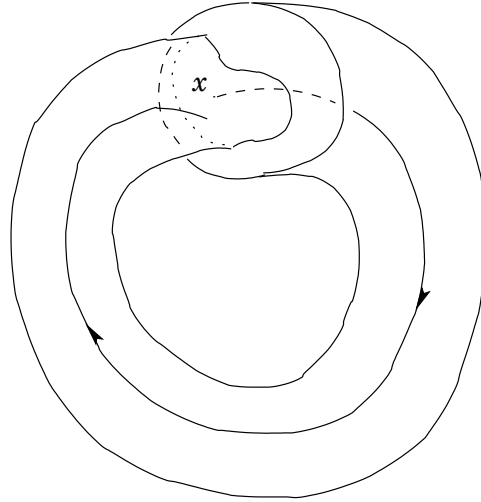


FIGURA 18

Assim, se  $x \in \text{Fix} f^n$  obtemos uma órbita fechada em  $T_f$  a qual intercepta a seção  $X \times \{0\}$   $n$  vezes (não em pontos distintos, a menos que  $n$  seja minimal). Sendo  $\Gamma := \pi_1(T_f)$  temos que  $\Gamma$  é uma extensão de  $\pi = \pi_1 X$  por  $\mathbb{Z}$ . Especificamente, se  $f$  é um homeomorfismo, então  $\Gamma$  admite a seguinte representação:

$$\Gamma = \langle \pi, z | xz = z f_{\#}(x), x \in \pi \rangle.$$

Em cada dimensão  $q$ , a aplicação de cadeia celular  $\tilde{f}_{\#q}$  produz uma  $\mathbb{Z}\pi$ -aplicação  $\tilde{F}_q$  e, portanto, uma matriz com respeito a uma base  $\mathbb{Z}\pi$  dada. Temos que

$$x \alpha \tilde{f}_{\#}(x)^{-1} = \beta \quad \Leftrightarrow \quad x(\alpha z^{-1})x^{-1} = \beta z^{-1}$$

i.e.,  $\alpha z^{-1}$  e  $\beta z^{-1}$  são conjugados. O que significa que a conjugação (torcida via  $f_{\#}$ ) em  $\pi$  torna-se a conjugação normal em  $\Gamma$ . Ou seja, é equivalente considerarmos as classes de conjugação em  $\Gamma$  ou as classes de Reidemeister em  $\pi$ . Sendo  $\Gamma_c$  o conjunto das classes de conjugação em  $\Gamma$ , podemos, então, definir

$$(15.1) \quad \mathfrak{L}_{\Gamma}(f, \tilde{f}) := \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \rho_{\Gamma} \circ \text{tr}(z\tilde{F}_q) \quad \in \mathbb{Z}\Gamma_c$$

onde  $\rho_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow \Gamma_c$  é a projeção canônica.

Analogamente, para as iteradas  $f^n$ , temos

$$(15.2) \quad \mathfrak{L}_{\Gamma}(f^n, \tilde{f}^n) := \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \rho_{\Gamma} \circ \text{tr}(z\tilde{F}_q)^n \quad \in \mathbb{Z}\Gamma_c.$$

Observe que *todos* os traços de Reidemeister, para os vários  $n$ , pertencem ao *mesmo* grupo abeliano  $\mathbb{Z}\Gamma_c$ . Em particular, para homeomorfismo de superfícies, a derivada de Fox pode ser usada para calcular  $\mathfrak{L}_{\Gamma}(f^n, \tilde{f}^n)$ .

Por exemplo, se  $X$  é o disco com alguns pontos removidos, então  $X$  tem o mesmo tipo homotópico que o ‘buquet’ de círculos. Nesse caso,

$$\mathfrak{L}_{\Gamma}(f^n, \tilde{f}^n) = [1] - [\text{tr}(zD)^n]$$

onde

$$D = \left( \frac{\partial f_{\#}(a_i)}{\partial a_j} \right).$$

Aqui não existem células 2-dimensionais e os círculos no ‘buquet’ produzem os geradores  $\{a_j\}$ .

**OBSERVAÇÃO 15.1.** A Teoria de pontos fixos de Nielsen e o traço de Reidemeister têm sido usados para estudar várias soluções de equações diferenciais e fluxos em dinâmica.

## 16. Conclusão

Existem dois tópicos centrais na teoria de pontos fixos de Nielsen:

1. (realização) Existe  $f' \sim f$  tal que  $N(f') = MF[f]$ ?
2. (computação) Como calcular  $N(f)$ ?

Definimos,

$$MF[f] := \min\{\#Fixg | g \sim f\}.$$

Nas variedades compactas  $X$  temos dois casos para o tópico **1.**: (i)  $\dim X \neq 2$ : o teorema de Wecken 9.1 nos dá uma resposta positiva. (ii) Quando  $\dim X = 2$  a resposta é NÃO quando  $\chi(X) < 0$ . Na realidade, para qualquer inteiro positiva  $m$ , podemos construir uma aplicação  $f_m : X \rightarrow X$  tal que

$$MF[f_m] - N(f_m) \geq m.$$

Dessa forma, em dimensão dois, a verdadeira questão é: Como calcular  $MF[f]$ ?

Para o tópicos **2.**, existem as condições de Jiang mas elas colocam restrições bastante severas sobre o grupo fundamental group, e portanto, sobre os espaços.

Algumas vezes, um espaço  $X$  é constituído de partes relativamente simples, dispostas ao longo (“parametrizadas por”) um espaço “simples” ou admite um recobrimento simples. Por exemplo, se  $\hat{X}$  é um recobrimento regular de um espaço  $X$  e  $f : X \rightarrow X$  é uma auto-aplicação. Algumas vezes podemos calcular ou ao menos estimar  $N(f)$  em função de  $N(\hat{f})$  onde  $\hat{f}$  percorre o conjunto dos levantamentos de  $f$ . Outro exemplo são aplicação que preservam fibras de uma fibração  $p : X \rightarrow B$  (por exemplo,  $X = S^3$ ,  $B = S^2$  e  $p : S^3 \rightarrow S^3/S^1$  é a fibração de Hopf). Supondo que  $f : X \rightarrow X$  é uma aplicação que preserva fibras tal que

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{\hat{f}} & B \end{array}$$

é comutativo. Se  $b \in \text{Fix} \bar{f}$  então  $f$  induz uma auto-aplicação  $f_b : F \rightarrow F$  onde  $F = p^{-1}(b)$ . Sob certas condições,  $N(f)$  pode ser calculado em função de  $N(\bar{f})$  e  $N(f_b)$ .

Espaços do tipo Jiang também são exemplos nos quais o número de Nielsen pode ser calculado usando-se o número de Reidemeister.

Terminaremos essas notas discutindo uma variação particular (ou generalização) da teoria de pontos fixos, chamada teoria de raízes, que tem recebido bastante atenção em trabalhos recentes. Sobre outros tópicos relacionados, indicamos ao leitor as seguintes atas de conferências [4], [3], [9], [11], [7], e [6].

Logo após S. Lefschetz anunciar seu teorema de ponto fixo, ele generalizou seus resultados para o contexto de coincidências. Sendo  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicações entre  $n$ -variedades fechadas, conexas, orientáveis e trianguladas, usando a dualidade de Poincaré, ele definiu um número de Lefschetz para coincidências  $L(f, g)$  e então mostrou que  $L(f, g) \neq 0$  implica que para qualquer  $f' \sim f, g' \sim g$ ,  $\text{Coin}(f', g') := \{x \in X \mid f'(x) = g'(x)\}$  será não vazio. Nos anos 1940, W. Franz generalizou a idéia de classes de pontos fixos de Nielsen para coincidências. Dois pontos  $x, y \in \text{Coin}(f, g)$  são *Nielsen equivalentes* (como coincidências do par  $f, g$ ) se existe uma curva  $C$  de  $x$  até  $y$  tal que  $f \circ C \sim g \circ C$  relativamente aos pontos extremos. Definindo-se o índice de coincidências, o número de Nielsen, que é o número de classes com índice não nulo, pode ser definido. A aluna de Franz, H. Schirmer, provou, em sua tese (1955) um análogo, para coincidências, do teorema de Wecken 9.1, mostrando que para  $n \geq 3$ , o número de Nielsen é o melhor limitante inferior para o número mínimo de pontos de coincidências nas classes de homotopia de  $f$  e de  $g$ . No caso especial em que  $g$  é a aplicação constante, a teoria de coincidências se transforma em teoria de *raízes*, i.e., o estudo das soluções da equação  $f(x) = a$ . Na realidade, uma teoria similar à de Nielsen já tinha sido desenvolvida por H. Hopf em 1931 em seu trabalho sobre  $a$ , então chamada, teoria de grau de Hopf. Uma propriedade especial das raízes é o teorema a

seguir, provado por Hopf (e também redescoberto, independentemente, para uma situação mais geral por R. Brooks em 1973).

**TEOREMA 16.1.** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação entre duas variedades conexas, fechadas e orientáveis e  $a \in Y$ . Se  $\deg f = 0$  então  $N(f; a) = 0$ . Se  $\deg f \neq 0$  então  $N(f; a) = [\pi_1 Y : f_{\#}(\pi_1 X)]$  onde  $N(f; a)$  denota o número de Nielsen para raízes de  $f$  com respeito a  $a$ .*

O teorema de Hopf é um resultado do tipo de Jiang, no sentido em que todas as classes de raízes têm o mesmo índice de raízes. Quando  $\deg f \neq 0$ ,  $N(f)$  coincide com o número de Reidemeister  $R(f; a)$  que é igual ao índice do subgrupo  $f_{\#}(\pi_1 X)$  em  $\pi_1 Y$ . Ou seja, a teoria de raízes é mais calculável e, em várias situações, pode ser usada para se obter informações sobre pontos fixos ou coincidências.

Para ilustrar esse comentário considere uma auto-aplicação  $f : T^2 \rightarrow T^2$  no toro bidimensional. Associamos a  $f$  uma aplicação  $\varphi_f : T^2 \rightarrow T^2$  dada por  $\varphi_f(x) = x^{-1} \cdot f(x)$ . Onde olhamos o toro  $T^2$  como um grupo topológico de forma que  $x^{-1}$  denote o inverso de  $x$  em  $T^2$  e  $x^{-1} \cdot f(x)$  é o produto (a operação no grupo) dos elementos  $x^{-1}$  e  $f(x)$  em  $T^2$ . Observe que  $f(x) = x$  se, e somente se,  $\varphi_f(x) = e$ , a unidade do grupo em  $T^2$ . Em outras palavras, os pontos fixos de  $f$  passaram a ser as raízes de  $\varphi_f$ . Isso mostra que a teoria de Nielsen para os pontos fixos de  $f$  pode ser transportada (depois de Hopf) para a teoria de Nielsen para raízes de  $\varphi_f$ . Além disso, podemos provar que  $L(f) = \deg \varphi_f$ . Logo, não é difícil ver que os resultados do Teorema 16.1 podem ser re-escritos como os do Teorema 12.1.



## Apêndice

### 17. Revisão

Nesse apêndice relembremos alguns resultados básicos da topologia algébrica.

Dados dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$ , uma equivalência de homotopia de  $X$  para  $Y$  é uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  junto com uma outra aplicação  $g : Y \rightarrow X$  tais que  $g \circ f \sim 1_X$  e  $f \circ g \sim 1_Y$ . Nesse caso, dizemos que  $X$  e  $Y$  têm o mesmo tipo homotópico e escrevemos  $X \sim Y$ .

Em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , tomamos  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  onde o 1 aparece na  $i$ -ésima coordenada. Os pontos  $e_1, \dots, e_{n+1}$  geram o  $n$ -simplexo padrão  $\Delta_n$ . Ou seja,

$$\Delta_n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_i \geq 0 \text{ e } \sum x_i \leq 1\}.$$

Assim,  $\Delta_0$  é exatamente um ponto,  $\Delta_1$  é o segmento de reta entre  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ ,

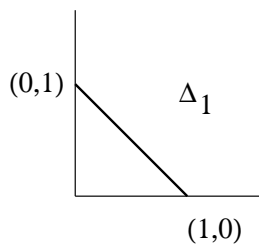


FIGURA 19

e  $\Delta_2$  é o triângulo equilátero com vértices  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(1, 0, 0)$ .

Uma  $p$ -cadeia (*singular*) em um espaço topológico  $X$  é uma aplicação contínua  $\sigma_p : \Delta_p \rightarrow X$ . Sendo  $S_p(X) = S_p(X; \mathbb{Z})$  o grupo abeliano

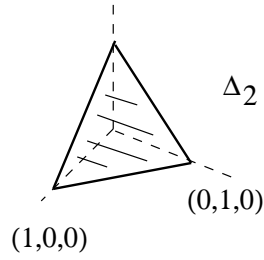


FIGURA 20

livre, gerado pelo conjunto das  $p$ -cadeias. Definimos o *operador bordo*  $\partial_p : S_p \rightarrow S_{p-1}$  tomando-se

$$\partial_p(\sigma_p)(\Delta_{p-1}) = \sum_{i=1}^p (-1)^i \sigma_p(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_p)$$

onde  $\widehat{x}_i$  significa que omitimos a  $i$ -ésima coordenada. Temos que  $\partial_p \partial_{p+1} = 0$  e então  $\{S_p(X), \partial_p\}$  é um *complexo de cadeia*.

Tomando-se  $Z_p := \text{Ker} \partial_p$  e  $B_p := \text{Im} \partial_{p+1}$ . Observe que  $B_p \subseteq Z_p$ . O  $p$ -ésimo grupo de homologia singular de  $X$  é dado por

$$H_p(X) = H_p(X; \mathbb{Z}) := Z_p / B_p.$$

Se  $(X, A)$  é um par, definimos  $S_p(X, A) = S_p(X) / S_p(A)$ . O operador bordo em  $S_p(X)$  e também em  $S_p(A)$  induzem um operador  $\partial$  em  $S_p(X, A)$ . Segue que  $\{S_p(X, A), \partial\}$  é um complexo de cadeia e sua homologia, denotada por  $H_*(X, A)$ , é chamada homologia singular relativa do par  $(X, A)$ .

Para complexos simpliciais ou celulares, definimos complexos de cadeia similares e seus correspondentes grupos de homologia. Para um poliedro compacto  $X$ , temos que

$$H_*^{\text{singular}}(X) \cong H_*^{\text{simplicial}}(X) \cong H_*^{\text{celular}}(X).$$

Se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  são aplicações, então  $f$  induz um homomorfismo  $f_{*q} : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ . Além disso, temos que  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .

## Referências Bibliográficas

- [1] Robert F. Brown, “The Lefschetz Fixed Point Theorem,” Scott-Foresman, Glenview, Illinois, 1971.
- [2] Robert F. Brown, Fixed point theory. *History of topology*, 271–299, North-Holland, Amsterdam, 1999.
- [3] Fixed point theory and its applications. Proceedings of a conference held at the International Congress of Mathematicians, University of California, Berkeley, California, August 4–6, 1986. Edited by R. F. Brown. *Contemporary Mathematics*, 72. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
- [4] Fixed point theory. Proceedings of a Conference held at the Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Quebec, June 2–21, 1980. Edited by Edward Fadell and Gilles Fournier. *Lecture Notes in Mathematics*, 886. Springer, Berlin, 1981
- [5] D.L. Gonçalves and J.C. de Souza Kiihl, “Teoria do Índice,” 14<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio De Janeiro, 1985.
- [6] Theory of fixed points and its applications. Proceedings of the International Conference held at the University of São Paulo, São Paulo, July 26–30, 1999. Edited by Daciberg L. Gonçalves and Peter N. Wong. *Topology Appl.* 116 (2001), no. 1. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2001.
- [7] Nielsen theory and Reidemeister torsion. Papers from the Workshop on Dynamical Zeta Functions, Nielsen Theory and Reidemeister Torsion held in Warsaw, June 24–July 5, 1996. Edited by Jerzy Jezierski. *Banach Center Publications*, 49. Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Warsaw, 1999.
- [8] B. Jiang, “Lectures on Nielsen Fixed Point Theory,” *Contemp. Math.* **14**, Amer. Math. Soc., Providence, 1983.
- [9] Topological fixed point theory and applications. Proceedings of the conference held in Tianjin, April 5–8, 1988. Edited by Bo Ju Jiang. *Lecture Notes in Mathematics*, 1411. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [10] T. Kiang, “The Theory of Fixed Point Classes,” Springer, New York, 1987.
- [11] Nielsen theory and dynamical systems. Proceedings of the AMS-IMS-SIAM Summer Research Conference held at Mount Holyoke College, South Hadley,

- Massachusetts, June 20–26, 1992. Edited by Christopher K. McCord. *Contemporary Mathematics*, 152. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993
- [12] J. Vick, “*Homology Theory*,” Academic Press, New York 1973.